



Instituto Universitario Naval  
ESCUELA DE CIENCIAS DEL MAR

TESINA DE LICENCIATURA EN CARTOGRAFÍA

**ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MÉTODOS DE  
INTERPOLACIÓN PARA LA GENERACIÓN DE MODELOS  
DIGITALES DEL TERRENO**

Alumno: Fernando Esteban García

Director: Agrim. Carlos Alberto Piñero

2004

## INDICE

### RESUMEN

<b>1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>2</b>
1.1 Objetivo .....	2
1.2 Métodos utilizados para la evaluación .....	3
1.3 Origen de los datos .....	4
<b>2. MODELOS DIGITALES DEL TERRENO .....</b>	<b>5</b>
2.1 Procesos para generar modelos digitales del terreno .....	6
<b>3. ADQUISICIÓN DE DATOS .....</b>	<b>8</b>
3.1 Clasificación del terreno .....	8
3.2 Levantamiento de datos .....	8
3.3 Procesamiento de los datos .....	9
<b>4. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN .....</b>	<b>11</b>
4.1 Interpolación en Función Inversa a la Distancia .....	13
4.1.1 Métodos de búsqueda .....	14
4.2 Kriging .....	17
4.2.1 Variograma .....	18
4.2.2 Cálculo de las ponderaciones .....	22
4.3 Funciones de Base Radial .....	24
4.4 Curvatura Mínima .....	26
4.4.1 Interpolación con un polinomio bilineal .....	26
4.4.2 Doble Interpolación lineal .....	27
4.4.3 Interpolación por función polinomial .....	27
4.5 Vecino más Próximo .....	30
4.5.1 Polígonos de Thiessen .....	30
4.6 Triangulación con Interpolación Lineal .....	32
4.6.1 Triangulación .....	32
4.6.2 Selección de vértices .....	34
4.6.3 Interpolación .....	35
4.7 Análisis de Superficie de Tendencia .....	37
<b>5. DESEMPEÑO O FIDELIDAD .....</b>	<b>40</b>
5.1 Método .....	40
<b>6. LEVANTAMIENTO ALTIMÉTRICO DEL CERRO CHENQUE .....</b>	<b>43</b>
6.1 Tipos de muestreo .....	43
6.1.1 Muestreo A .....	44
6.1.2 Muestreo B .....	44
6.1.3 Muestreo C .....	45

<b>7. COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN .....</b>	<b>47</b>
7.1 Experiencia con el muestreo A .....	47
7.2 Experiencia con el muestreo B .....	48
7.3 Experiencia con el muestreo C .....	48
7.4 Evaluación estadística .....	49
<b>8. REPRESENTACIONES GRÁFICAS .....</b>	<b>52</b>
8.1 Imágenes Perspectivas .....	52
8.2 Curvas de nivel .....	53
<b>9. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>55</b>
<b>10. CONCLUSIONES FINALES .....</b>	<b>62</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>65</b>

## TABLAS Y GRÁFICOS

*Tabla 1.1 Valores iniciales .....	20
*Tabla 1.2 Cálculo del variograma .....	20
*Tabla 1.3 Resultados .....	21
*Tabla 2 Clases de muestreo .....	45
*Tabla 3 Experiencia A .....	47
*Tabla 4 Métodos de búsqueda aplicados .....	48
Tabla 5.1 Análisis estadísticos de las discrepancias entre diferentes métodos de interpolación (muestreo A) .....	68
Tabla 5.2 (muestreo B) .....	69
Tabla 5.3 (muestreo C) .....	70
Tabla 6 Precisiones de los métodos de interpolación con aplicación de diferentes métodos de búsqueda .....	71
Tabla 7 Tabla de frecuencias .....	72
Figura 1 Área de estudio .....	73
*Figura 2.1 y 2.2 Métodos de búsqueda .....	16
*Figura 3.1 Efecto de cluster .....	16
*Figura 3.2 Solución al efecto de cluster .....	16
*Figura 4.1 Valores de la variable “alturas” en diversos puntos situados sobre una línea .....	19
*Figura 4.2 Variograma de la variable “alturas” .....	21
*Figura 5 Polígonos de Thiessen .....	31
*Figura 6.1 Triangulación de Delaunay .....	33
*Figura 6.2 Interpolación de un punto a partir de la ecuación de un plano .....	36
Figura 7 Comparación Restitución – Kriging .....	74

Figura 8.1 <i>Muestreo irregular A</i> .....	75
Figura 8.2 <i>Muestreo irregular B</i> .....	76
Figura 8.3 <i>Muestreo irregular C</i> .....	77
Figuras 9.1 y 9.2 <i>Discrepancias entre la grilla de referencia y las grillas generadas</i> .....	78
Figuras 10.1 a 10.9 <i>Imágenes perspectivas</i> .....	80
Figuras 11.1 a 11.7 <i>Comparación de las curvas de nivel y perfiles topográficos</i> .....	89

\**Tablas y gráficos incluidos dentro del texto*

## RESUMEN

En el presente trabajo se describen los procesos y resultados obtenidos de un estudio comparativo entre diferentes métodos de interpolación para la generación de Modelos Digitales del Terreno (MDT) con fines cartográficos.

Los métodos estudiados en este trabajo son : Inversa a la Distancia, Kriging, Vecino más Próximo, Curvatura Mínima, Funciones de Base Radial, Triangulación con Interpolación Lineal y Superficie de Tendencia.

A partir de una restitución fotogramétrica del “Cerro Chenque”, ubicado al norte de la ciudad de Comodoro Rivadavia en la Provincia de Chubut, se elaboró un archivo con coordenadas (X, Y, Z). Este procedimiento generó una densa masa de datos (muestreo) sobre toda la extensión del área de 1400 por 800 metros, cubriendo los rasgos morfológicos del cerro.

La comparación se realizó de forma estadística y gráfica. La primera comprende dos niveles de análisis del modelo, uno global y otro más detallado para determinar las discrepancias en cada sector del mismo, mientras que la segunda se basa en las principales salidas de los MDT. Esto permitió determinar las fortalezas y debilidades de las diferentes técnicas para la construcción de un MDT.

Entre los métodos de interpolación estudiados, se destaca el método de Funciones de Base Radial con la función Multicuadrática, el cual no se encuentra entre los más populares y ha mostrado obtener MDT de buena calidad con resultados similares al de Kriging, tanto desde el punto de vista estadístico como en el comportamiento gráfico.

Otro método que demostró alta fidelidad es la Triangulación con Interpolación Lineal, del cual se resalta su especialidad para la construcción de las líneas estructurales del relieve, como drenajes, divisorias de agua y cambios bruscos de pendiente.

Los resultados con densidades de muestreo bajas, demostraron que los tres métodos mencionados, son los únicos que pueden generar MDT óptimos. Para ello los muestreos deben tener una regularidad espacial y estar densificados en las zonas críticas del relieve.

Luego de haber estudiado varios métodos se puede decir, que la generación de un modelo de calidad está sujeto a la elección del método de interpolación apropiado, de acuerdo al tipo de muestreo y los requerimientos de salida.

# 1. INTRODUCCIÓN

Según indican los estudios realizados por Pallejá y Passini (1984), así como también Ugrin (1990), el proceso de modelación digital se divide en tres etapas, que son abordadas en este trabajo: adquisición primaria de datos, proceso de conversión de datos y desempeño o performance.

Para generar un MDT se parte de un suficiente número de puntos distribuidos sobre toda la extensión del terreno (adquisición primaria de datos), obtenidos por métodos de levantamiento directos o indirectos, dentro de estos últimos se encuentra el fotogramétrico. Una de las características de esta técnica es la posibilidad de abarcar grandes extensiones de terreno, como presenta el Cerro Chenque. Para la adquisición de datos el operador fotogramétrico realizó una importante selección de puntos de acuerdo a los detalles del relieve. A través de la representación altimétrica con curvas de nivel y los rasgos morfológicos más destacados, se obtuvo una gran densidad de puntos distribuidos irregularmente que se adaptan a la morfología del cerro, conformando el muestreo de datos.

Posteriormente dicho muestreo es usado para el proceso de conversión de datos, mediante la elección de un apropiado método de interpolación. Este proceso genera los datos distribuidos según una *malla* o *grilla regular*, formada por nodos o vértices con coordenadas (XYZ), reemplazando a los datos originales distribuidos irregularmente.

Finalmente, el desempeño o performance, corresponde a la precisión del modelo de acuerdo al tratamiento de las dos primeras etapas. La obtención de los resultados de estos procedimientos para la generación de modelos digitales, son abordados en este trabajo mediante una comparación estadística y en segundo lugar, una evaluación gráfica a través de imágenes 3D, curvas de nivel y perfiles topográficos.

## 1.1. Objetivo

El objetivo de este trabajo es evaluar la fidelidad de los diferentes métodos de interpolación espacial, comúnmente utilizados para generar modelos digitales del terreno, mediante comparaciones estadísticas y gráficas.

Los métodos estudiados son: Inversa a la Distancia, Kriging, Vecino más Próximo, Curvatura Mínima, Funciones de Base Radial, Triangulación con Interpolación Lineal y Superficie de Tendencia. Son experimentados con diferentes densidades de muestreo y parámetros propios de cada método para determinar la forma de obtener óptimos modelos digitales.

## **1.2. Métodos utilizados para la evaluación**

Primero es necesario conocer el fundamento teórico de cada método de interpolación, para luego producir una gran cantidad de modelos y realizar la evaluación de los mismos, a través de una *comparación estadística y gráfica*.

Para realizar la evaluación estadística es necesario contar con un marco de referencia comparativo. Las opciones para generar un marco de referencia son: una grilla de referencia elaborada por técnicas fotogramétricas (Pallejá y Passini, 1984) o topográficas (Ugrin, 1990) y otra que consiste en un muestreo de puntos característicos del relieve para comprobar el grado de ajuste con el modelo generado.

Como en este trabajo los datos originales tienen una distribución irregular, al utilizarlos como referencia no permitirían realizar una apropiada comparación estadística con las grillas regulares generadas por cada método de interpolación. En el caso de intentar superponer un muestreo irregular de datos con la grilla regular generada, se podrían evaluar solamente los puntos coincidentes con los nodos de la grilla y hasta pueden ser los menos relevantes del modelo. Como esta comparación alcanzaría resultados insuficientes para los objetivos de este trabajo, se construyó un marco de referencia a partir de la generación de una grilla de puntos obtenidos por alguno de los métodos de interpolación intervenientes en este trabajo, que represente con la mayor fidelidad la restitución.

La elección del método de interpolación para generar la grilla de referencia, se realizó a través de una comparación gráfica de las curvas de nivel y perfiles topográficos de cada método con respecto a las producidas por la restitución. Sobre todos los métodos experimentados, *Kriging* obtuvo los resultados más adecuados para generar la *grilla de referencia*, ya que es el método que mejor se ajustó a la restitución en todos los sectores.

Se generó una grilla de referencia de forma que coincidiera planimétricamente con la estructura de las grillas generadas. Esto permitió aplicar distintos métodos estadísticos cruzando ambas grillas, para una evaluación sobre todo el dominio del modelo.

Si bien es cierto que *Kriging* queda fuera del análisis estadístico para saber cuales son las discrepancias, igualmente será estudiado su fundamento teórico, ya que se presenta como el más interesante debido a las operaciones que realiza su algoritmo de interpolación.

El otro tipo de evaluación de los MDT mediante la *comparación gráfica*, se realizó a partir de las curvas de nivel y perfiles topográficos generados por cada método de interpolación. Para este caso se utilizaron como referencia las *curvas de nivel de la restitución*, ya que la experiencia del operador fotogramétrico produce confiabilidad sobre la calidad de la representación altimétrica del Cerro Chenque.

El mismo software fue utilizado para la generación y visualización de los modelos digitales del terreno. Este contiene todos los métodos de interpolación experimentados en

este trabajo, de los cuales se pueden obtener las grillas generadas con un formato de matriz de alturas o una lista de nodos con las coordenadas (XYZ). Con este software también se generaron las salidas gráficas con imágenes perspectivas y curvas de nivel.

### **1.3. Origen de los datos**

Una restitución fotogramétrica del área del Cerro Chenque, fue utilizada tanto para obtener el muestreo irregular de datos (archivo XYZ), como las salidas gráficas.

El área tiene una dimensión de 1400 por 800 metros y está ubicada al norte de la ciudad de Comodoro Rivadavia en la Provincia de Chubut. La zona fue seleccionada por las grandes dimensiones de terreno, sus fuertes pendientes y sus variadas formas de relieve, permitiendo evaluar si los distintos métodos de interpolación, pueden crear superficies que se adapten a las diferentes características del terreno.

La figura 1 muestra los detalles del relieve del Cerro Chenque, donde el mapa representa la altimetría a través de la elaboración de curvas de nivel con una equidistancia de 20 metros. Con la fotogrametría fue posible definir los distintos rasgos morfológicos del cerro, tanto los naturales como los artificiales. Los primeros corresponden a las barrancas marcadas por los cambios bruscos de pendiente y los cursos de agua temporarios al norte del cerro. Por otro lado, están las construcciones artificiales como caminos, sendas y un sector de la Ciudad que se encuentra al pie del Cerro en la parte sur del mismo.

## 2. MODELOS DIGITALES DEL TERRENO

El término *Modelo Digital del Terreno* tiene su origen en el Laboratorio de Fotogrametría del Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT, USA) en la década de los años 50 y surgieron con el propósito de acelerar el diseño de caminos mediante el tratamiento digital de datos del terreno adquiridos por técnicas fotogramétricas, mediante algoritmos para la obtención de pendientes, áreas, etc.

Existen varias definiciones dependiendo básicamente de cada autor, pero la que se menciona en los primeros trabajos es la siguiente:

*"Una representación estadística de la superficie continua del terreno, mediante un número elevado de puntos selectos con coordenadas (x, y, z) conocidas, en un sistema de coordenadas arbitrario"* (Felicísimo, 1999).

Los MDT pueden generarse en un sistema de coordenadas arbitrario, pero en la actualidad existen ordenadores con suficiente capacidad de almacenamiento y aplicaciones informáticas que permiten relacionar el modelo a una proyección cartográfica.

Un problema limitante en los inicios fue los datos del terreno adquiridos por métodos fotogramétricos que podían ser almacenados en poca cantidad, dada la escasa capacidad de los ordenadores en esos tiempos. Fue por eso que para un mayor desarrollo de los MDT tuvieron que pasar algunos años más. El cambio lo produjo el *Harvard Laboratory for Computer Graphics and Spatial Analysis* cuando presentó en 1967 una aplicación formada por un conjunto de programas para el manejo de cartografía digital, que contenían algoritmos de interpolación para generar mapas a partir de puntos con sus coordenadas (XYZ) distribuidos irregularmente.

En la actualidad existen una gran variedad de aplicaciones informáticas para generar MDT, donde cada una presenta distintos métodos de interpolación con varias posibilidades de salidas gráficas y numéricas.

Los MDT son una herramienta valiosa que permiten realizar diversos análisis de la topografía del relieve, tales como:

La posibilidad del *tratamiento numérico de datos*, para realizar diversos estudios, análisis estadísticos y crear nueva información a partir de estos.

Las salidas gráficas, donde es posible obtener además de curvas de nivel, perfiles, distribuciones de pendiente en función de la altitud, histograma de alturas para conocer los desniveles de acuerdo a intervalos de altura prefijados y diversos mapas temáticos de acuerdo a los requerimientos del trabajo.

Otro aspecto interesante, el MDT puede ser usado por los Sistemas de Información Geográficos (GIS), debido a su manejo de la información espacial para construir una gran variedad de mapas temáticos. Además es posible realizar simulación de procesos mediante algoritmos que utilizan la información de los MDT para generar otros, llamados modelos digitales derivados. Un ejemplo de esto sería la simulación de una erupción volcánica, donde se podría obtener la probabilidad de que el flujo de lava pase por cada lugar (Felicísimo, 1999).

## **2.1. Procesos para generar modelos digitales**

Tanto en los trabajos publicados por Pallejá y Passini (1984), como en el elaborado por Ugrin (1990), los autores dividen en tres etapas los procesos para generar un MDT:

- Adquisición primaria de datos
- Proceso de conversión de datos (Interpolación)
- Desempeño o Performance (Fidelidad, Precisión)

Los autores mencionados coinciden en los siguientes aspectos:

El método de adquisición de datos debe adaptarse a las especificaciones de salida del MDT, que pueden ser identificadas en tres grupos: lineales (curvas de nivel, perfiles topográficos, líneas de drenaje), cómputos areales y volumétricos. La calidad de los datos es fundamental para lograr un modelo matemático aceptable y también es muy importante que la distribución de los datos sea uniforme y con mayor densidad sobre los rasgos morfológicos del relieve.

El proceso de conversión de datos, consiste en transformar los datos generalmente distribuidos de forma irregular, en una malla regular a través de un método de interpolación. Para la elección de un método apropiado se debe tener en cuenta las especificaciones de salida y además tiene que ser adaptado al tipo de distribución y densidad de datos que conforman el muestreo, siendo estos la entrada de los MDT.

Mientras que el desempeño o performance, corresponde a la fidelidad o precisión del MDT obtenido, que está ligado al resultado de la combinación de los procesos de adquisición y conversión de datos.

### **3. ADQUISICIÓN DE DATOS**

La adquisición de datos del terreno se logra mediante la aplicación de algún método de levantamiento lo que implica realizar un muestreo selectivo ante la imposibilidad de levantar los infinitos puntos que conforman la superficie topográfica, pero que a la vez permitan representar lo más fielmente posible su planialtimetría.

La adquisición de datos puede ser dividida en dos etapas, una previa conocida como “clasiación del terreno”, seguida del “levantamiento de datos”.

#### **3.1. Clasificación del terreno**

La clasificación del terreno consiste en determinar aquellas zonas que aportan mayor información sobre la morfología del terreno, son los llamados *puntos críticos del relieve*: como cimas, pasos (lugares donde cambia el sentido de la pendiente de cóncava a convexa) y fondos de una depresión relativa de la altura. Pero los datos que aportan mayor información son los puntos que pertenecen a las llamadas *líneas críticas del relieve*: divisorias de agua (en las salientes), líneas de vaguada (en las entrantes), cauces de ríos, barrancas, etc. (Bosque Sendra, 1992).

Esta clasificación permite definir el tipo de muestreo que represente los detalles del relieve, donde se decide la cantidad de datos necesarios y los sectores donde hay mayores indeterminaciones que deben ser densificados para generar un óptimo MDT.

#### **3.2. Levantamiento de datos**

La elección de un método para levantar datos del terreno se realiza después de realizar una clasificación del mismo, donde se tiene en cuenta además de las dimensiones, la ubicación, la precisión que requiere el trabajo y la influencia del factor económico.

Los métodos de levantamiento se dividen en directos e indirectos, los primeros son aquellos que miden directamente la altitud sobre el terreno; mientras que los métodos indirectos obtienen los valores numéricos a partir de documentos previos (Felicísimo, 1999).

A continuación se dan algunos ejemplos:

◆ MÉTODOS DIRECTOS

- Levantamiento topográfico
  - Altimetría
- Levantamiento con posicionadores satelitales
  - GPS (Global Positioning System)
- Levantamiento hidrográfico

◆ MÉTODOS INDIRECTOS

- Restitución
  - Estereo – imágenes digitales
  - Estereo – imágenes analógicas
  - Interferometría radar
- Digitalización
  - Automática
  - Manual

### 3.3. Procesamiento de los datos

La estructura de los datos cuando provienen de una restitución fotogramétrica se encuentran en un formato vectorial, donde cada segmento está definido por las coordenadas (XY) de sus vértices, que describen las trayectorias de las líneas y la cota (Z) su altimetría. De este modo, una curva de nivel queda representada por varios segmentos, donde la misma almacena una cadena de cotas (XYZ) que se sitúan sobre ella a intervalos adecuados (vértices) no siendo necesariamente iguales, para garantizar la exactitud del modelo y adaptarse a los finos rasgos morfológicos del terreno.

La estructura de un vector está compuesta por:

- *Código de función*: función matemática que utiliza el programa de computación para representar el vector.
- *Código de forma*: es un identificador que indica que representa el vector, como las curvas de nivel, caminos, etc.
- *Sucesión de coordenadas*: el programa almacena los vértices y confecciona un registro de coordenadas (XYZ).

Luego de clasificar y seleccionar los datos según su código de forma, se elabora una densa lista de puntos con coordenadas (XYZ) extraídas de los vértices de los segmentos.

Una vez confeccionada la lista de datos, es necesario realizar un procesamiento de los mismos para la detección de errores. Estos pueden dividirse en dos categorías: los *errores posicionales* originados por una deficiente localización geográfica de la cota o de la trayectoria de la curva de nivel, afectando la situación en el plano XY, y los llamados *errores atributivos* producidos por el operador fotogramétrico al asignar en forma imprecisa la altura de un nodo en el momento de la vectorización.

Para buscar los *errores atributivos groseros* un primer paso consiste en hallar aquellos datos cuyo valor altimétrico se encuentre fuera de los límites de cota máximo y mínimo conocidos. Una inspección visual de las curvas de nivel permite detectar la posible existencia de alguna cima o depresión puntual originada por la presencia de un dato con un valor de cota muy diferente a su entorno.

Además de la limpieza de errores, en el procesamiento también se realiza un cambio de formato de los datos para que puedan ser reconocidos por los programas de generación de modelos digitales.

## 4. MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

Mediante la selección de un método de interpolación se realiza la conversión de datos que consiste en convertir un conjunto de datos con una distribución irregular en una malla o grilla regular.

Además de la selección de un método de interpolación apropiado para generar la grilla, es importante definir la estructura de esta última, para que represente de la mejor forma la morfología del relieve. Primero se determina la extensión del área a modelar fijando los límites máximos y mínimos (XY) de la grilla, esto no implica que los datos que se encuentran fuera de los límites no intervengan durante el proceso del cálculo de interpolación. De acuerdo a los requerimientos del trabajo, la grilla puede ser rectangular o cuadrada, dependiendo de la equidistancia entre nodos que se define de forma que puedan adaptarse a la morfología del relieve y al grado de detalle que se quiera representar. Otro factor a tener en cuenta para definir las dimensiones de la grilla, es de acuerdo a las necesidades propias de cada método de interpolación, debido a que cada método para estimar el valor en un nodo, necesita en algunos casos una cantidad mínima de datos de su entorno.

Los métodos de interpolación son muy variados y pueden ser clasificados en distintos tipos. A continuación se describen algunos grupos (Bosque Sendra, 1992).

### Métodos globales y locales:

Se diferencian en la cantidad de puntos de referencia que utilizan para calcular el valor de la altura en cada nodo de la grilla.

Los *métodos globales* utilizan todos los puntos de referencia para definir una función  $z = f(x, y)$ , que represente la superficie del terreno en toda su extensión. Mientras que los procedimientos *locales*, emplean para el cálculo de la interpolación los puntos de referencia que se encuentran en el entorno de cada nodo.

### Métodos exactos y aproximados:

En el proceso de interpolación cuando se calcula la cota Z de un vértice de la grilla, es posible que alguno de estos coincida con un punto de referencia. En estos casos, los métodos exactos le asignan al vértice el valor del dato de referencia, mientras que los

aproximados no tienen en cuenta esta coincidencia y el punto es recalculado, interviniendo en la interpolación como parte de los puntos vecinos.

### Métodos analíticos y directos

Este tercer tipo de clasificación es de acuerdo a los procesos matemáticos de la interpolación, si realizan o no un análisis previo de la variable a interpolar y su entorno.

Los *métodos analíticos* son los que utilizan los procesos de análisis previo llamados *autocorrelación espacial*. Este procedimiento consiste en determinar en función de la distancia entre datos y la variación altimétrica de los mismos, una función matemática que se adapte y pueda determinar el entorno del punto a interpolar donde existe autocorrelación y de esta forma obtener el valor  $z$  del punto. Este tema será abordado en la sección 4.2. Por el contrario los *métodos directos* no realizan ningún análisis previo de la variable a interpolar. Cada método tiene una suposición diferente para el cálculo y en base a ello, realiza la interpolación para determinar el valor en todos los nodos de la malla o grilla.

Para realizar la comparación estadística de los distintos métodos de interpolación, primero es necesario conocer su fundamento teórico, ya que cada uno presenta distintos algoritmos matemáticos.

Los métodos estudiados en este trabajo son:

- Inversa a la Distancia
- Kriging
- Funciones de Base Radial
- Curvatura Mínima
- Vecino más Próximo
- Triangulación con Interpolación Lineal
- Superficie de Tendencia

#### 4.1. INTERPOLACIÓN EN FUNCIÓN DE LA INVERSA A LA DISTANCIA

Este método local y exacto, para realizar la interpolación de un punto o nodo de la grilla, presupone que son los puntos de referencia más próximos los que tienen las alturas más parecidas y además, que esta semejanza disminuye con la distancia entre el punto calculado y el de referencia (Bosque Sendra, 1992). Por lo tanto, el valor del punto a interpolar se estima asignando pesos a los datos del entorno en *función inversa a la distancia* que los separa del punto en estudio. Se establece entonces, que los puntos más cercanos tienen un peso mayor en el cálculo, aunque la relación no tiene por qué ser lineal y de este modo los puntos de referencia más alejados tendrán una influencia ínfima en el cálculo del valor a interpolar.

La fórmula general de la interpolación en función inversa a la distancia es:

$$z_i = \frac{\sum_j (z_j \cdot W_{ij})}{\sum_j W_{ij}}$$

$z_i$ , valor estimado para el punto  $i$  a interpolar

$z_j$ , altitud real del punto dato

$W_{ij}$ , es el peso asociado al dato  $j$  en el cálculo del punto  $i$

Los métodos de inversa a la distancia calculan la distancia euclídea ( $D_{ij}$ ) entre cada dato y el punto a interpolar, al establecer una función de proporcionalidad entre el peso y la distancia.

Existen muchas posibilidades para establecer el peso de cada dato ( $W_{ij}$ ), entre las más usuales están:

$$W_{ij} = \frac{1}{D_{ij}^a}$$

$a$ , exponente de ponderación

En el supuesto de tener un exponente de ponderación 1, la influencia de los datos queda determinada por la distancia solamente, siendo los datos próximos los que tengan mayor influencia en el cálculo, pero los más lejanos tendrán incidencia aunque en menor medida.

En el caso de utilizar un exponente de ponderación 2 o superior, restringe en mayor medida la participación de los datos, siendo los más próximos los que estiman el valor  $Z$  del punto a interpolar. Esto produce que sea menor la cantidad de datos que tengan mayor peso que el caso de un exponente = 1, donde abarcaría un entorno más amplio.

Por lo expuesto anteriormente, para la selección de un exponente de ponderación, se debe tener en cuenta el área de influencia que se desea para definir la cota (Z) del punto a interpolar. Generalmente el coeficiente más usual es 1 o 2, pero cambiar esos valores pueden generar superficies topográficas diferentes; por tal motivo la selección de los pesos es un tema de importancia debido que es el punto fuerte del método y en ocasiones se elige un exponente de ponderación en forma arbitraria.

Se puede decir entonces que la elección de un exponente de ponderación está ligado a la densidad de muestreo, un coeficiente de valor 1 es recomendable en los casos donde se tiene valores espaciados y de esta forma intervienen en la interpolación una cantidad de datos razonable, debido que un exponente 2 o superior generaría que el valor del punto a interpolar sea similar a uno o dos puntos próximos. Este tipo de peso es conveniente aplicarlo a los muestreos más densos donde el entorno de un punto a interpolar tenga una gran cantidad de datos y es necesario discriminar valores para que no influyan otros más lejanos.

#### 4.1.1. Métodos de búsqueda

La decisión del radio de búsqueda y la cantidad exacta de puntos que intervendrán en la interpolación, queda a elección del usuario, pero de una adecuada elección dependen los resultados de la interpolación.

Los métodos de búsqueda definidos por un círculo son los más habituales para definir la vecindad del punto a interpolar, pero también existe la posibilidad de utilizar una elipse. Estos son usados generalmente en muestreos de datos físicos (temperatura, salinidad, etc.), para casos donde los puntos del muestreo tienen mayor similitud en una dirección concreta y la elipse permite aplicar un mayor peso en el cálculo de la interpolación de un nodo en una dirección específica (Golden Software Inc., 1997).

Sobre la elipse se define la dimensiones del los ejes mayor, menor y el ángulo de inclinación, de acuerdo a la dirección que tienden los datos.

El procedimiento de búsqueda de datos puede efectuarse de distintas formas:

**Método de búsqueda normal:** especifica que los puntos de referencia usados para determinar un nodo de la grilla, serán encontrados por la búsqueda de los puntos más próximos alrededor del nodo. Los n puntos más próximos son limitados por el radio de búsqueda (ver figura 2.1).

Un problema derivado de usar la búsqueda normal es el denominado efecto de cluster. En figura 3.1 se observa como el valor calculado para A depende mucho de un

grupo de puntos muy cercanos entre sí y por ello seguramente con alturas muy parecidas, los que están numerados del 1 al 4. La forma de evitar este problema es interpolar usando el método de los cuadrantes (Bosque Sendra, 1992).

**Método de búsqueda por cuadrante:** en este caso, el procedimiento para la selección de puntos de referencia para calcular el valor del nodo de la grilla, consiste en dividir el área del entorno al nodo en cuatro cuadrantes (figura 2.2). Donde luego se define la cantidad de puntos de referencia por cada cuadrante que intervendrán en el cálculo de la interpolación y de esta forma usar los puntos más próximos al nodo, que son los que tienen alturas más parecidas a éste.

Aplicando el criterio de usar cuadrantes como se ve en la figura 3.2, se puede observar la solución al problema (*efecto de cluster*) planteado por la búsqueda normal, donde se usarían para obtener la altura de A los puntos 3, 5, 6 y 7. De este modo se asegura que la influencia sobre un punto calculado esté mejor repartida en todo el espacio circundante lo que, en ocasiones, produce mejores resultados.

**Método de búsqueda por octante:** ídem al anterior pero dividiendo el entorno al nodo en ocho partes. Este método de búsqueda resulta un poco difícil de aplicar debido a que se necesita una gran densidad y distribución de datos. En el momento que el programa busque la cantidad especificada de puntos por cada sector, podrían ingresar en el cálculo puntos muy lejanos o sería difícil de aplicar en los límites del modelo, donde los datos están ubicados en un sector. Igualmente para estos casos algunos programas permiten indicar la cantidad mínima de datos para la operación, en el caso de no cubrir todos los octantes o cuadrantes.

Por tal motivo, es apropiado el uso de cuadrantes, siendo una condición simple, sin grandes exigencias y permite cubrir de igual manera la vecindad del punto problema.

$z_j$ : nodo de la grilla  
 $z_1, z_n$ : datos dentro del entorno  
 $z_k$ : dato fuera del entorno  
 $r$ : radio de búsqueda

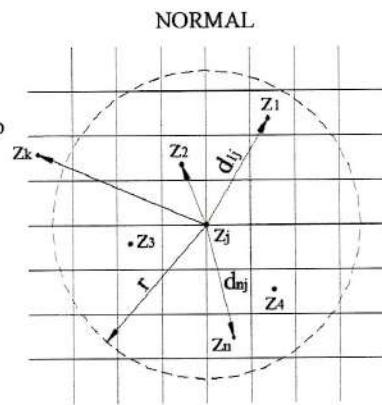


Figura 2.1



Figura 2.2

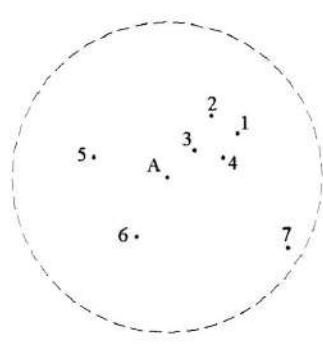


Figura 3.1. Efecto de cluster

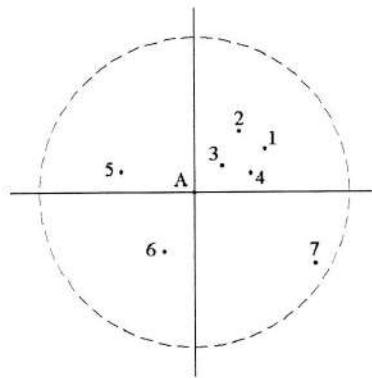


Figura 3.2. Solución el efecto de cluster

## 4.2. KRIGING

Al igual que los métodos de interpolación local el método considera que el valor altimétrico del punto a interpolar, resulta de los datos del entorno debido a que tienen cotas más parecidas, donde los más cercanos tendrán mayor influencia en el cálculo y los alejados su incidencia será ínfima.

Como kriging es un método geoestadístico, toma este concepto y parte de la hipótesis de que la cota Z del punto a interpolar puede deducirse de *la variación altimétrica entre datos próximos ubicados a diferentes distancias*.

Para representar esa variación de los valores de Z en forma esquemática, el método utiliza funciones homogéneas en toda el área que se ajusta a la variación espacial entre datos (Felicísimo, 1999). El instrumento que utiliza para esta representación y obtener los valores para el cálculo de la interpolación, se denomina *variograma* que es un gráfico de dispersión que relaciona los dos conceptos mencionados inicialmente, la variación altimétrica entre datos y la distancia que los separa.

A partir de aquí, una vez elaborado el variograma, kriging define algunos parámetros que intervendrán en la interpolación: la representación de la variación de Z entre datos, mediante el ajuste de una función matemática y como segundo paso determina la existencia de autocorrelación espacial de la variable, cuyo proceso tiene como finalidad determinar el entorno del punto a interpolar a través de aquellos valores de varianzas mínimas entre datos, que pueden explicar la variación altimétrica del punto a interpolar.

Luego de definir el entorno y la variación altimétrica, el variograma obtiene la asignación de pesos entre datos en función de la distancia, similar al proceso empleado al método de inversa a la distancia, donde los datos próximos al punto a interpolar tendrán mayor peso en el cálculo de la interpolación, en estos casos la operación es independiente para cada dato y el procedimiento se realiza mediante cálculos matriciales (Felicísimo, 1999).

La técnica de ajuste de una función que represente la variación espacial de los valores de Z para determinar el variograma, merece un desarrollo aparte, por lo tanto, en esta tesina sólo se hace una descripción somera del procedimiento que utiliza kriging para definir el variograma, y no se tratará el método para definir una función que se ajuste a este. Golden Software Inc. (1997), recomienda para definir los parámetros del variograma consultar bibliografía sobre geoestadística como (e.g. Isaak and Srivastava, 1989), donde describen las herramientas y técnicas necesarias para generar un variograma.

Sobre este tipo de técnicas se puede ver el trabajo realizado por Delgado García J., Cardenal Escarcena F. J. y Gómez Molina A. (2002), donde proponen una metodología

basada en el empleo de ventanas móviles para la obtención de parámetros del variograma, mediante la clasificación del terreno en función de los parámetros obtenidos para cada ventana. De esta forma intenta determinar que el variograma represente de una forma adecuada la variación altimétrica de los datos que se intentan modelizar.

En el caso específico del programa Surfer 6.04, incorpora tres componentes y de esta forma es posible generar más de 500 posibilidades de combinaciones de modelos de variogramas. Donde en cada uno de los componentes se puede seleccionar alguna función matemática con diferentes especificaciones de sus parámetros.

Para el caso de este trabajo, siguiendo las recomendaciones del Surfer 6.04 se utilizó la *función lineal* con los parámetros por defecto. Este variograma se presenta como el más simple que puede ser adaptado a cualquier tipo de variación espacial. Por no tener los parámetros de alcance y meseta, debido a que la función lineal tiene una pendiente continua que en ningún momento se estabiliza, no puede definir el entorno donde existe autocorrelación espacial, pero en la mayoría de las situaciones la meseta del variograma es aproximadamente igual a la varianza de los datos observados (Golden Software Inc., 1997).

#### 4.2.1. Variograma

El variograma  $\gamma(h)$  es un gráfico de dispersión con una función matemática que relaciona dos variables: una sobre el eje (x), la distancia entre puntos datos en una dirección concreta del plano, y en el eje de las (y) mide la variación altimétrica de una variable cuando sus valores se observan en puntos que estén separados a una distancia  $h$  (Bosque Sendra, 1992).

La construcción del variograma consta de dos partes, una experimental conocida como *variograma empírico* que representa la variación real de Z entre datos y la otra parte que elabora un modelo matemático llamado *variograma teórico* correspondiente a la función que mejor se ajusta a esa variación de Z para su representación estadística.

Para el cálculo del variograma existen varias ecuaciones, la más general se expresa mediante el variograma clásico según Golden Software Inc. (1997):

$$\gamma(h) = \frac{\sum (Z_i - Z_j)^2}{2N}$$

Siendo  $Z_i, Z_j$ , los valores de una variable en dos puntos del espacio ( $i, j$ ) que están separados a una distancia ( $h$ ) y donde N corresponde a la cantidad de pares de datos. Para el cálculo del variograma se generan parejas de datos con distancias similares entre ellos,

de este modo los pares con menor distancia tendrán menor variación altimétrica y serán los que tengan mayor peso para obtener el valor estimado del punto a interpolar.

El objetivo del variograma es determinar la forma concreta de autocorrelación espacial de una variable, definiendo cuales son los datos del entorno de esa variable donde existe autocorrelación.

*Definición:*

*La autocorrelación parte de la concepción básica de relacionar las distancias entre puntos del espacio con las diferencias de sus valores altimétricos. La autocorrelación intenta determinar si el valor (z) de una variable en un lugar del espacio hace más probable o menos que ese mismo valor ocurra en su entorno. En el caso que el valor de la variable pueda ocurrir en lugares cercanos existe autocorrelación. (Bosque Sendra, 1992)*

Este procedimiento que implementa kriging es similar a los métodos de búsqueda que define el usuario, pero en este caso kriging define en forma estadística el entorno de aquellos datos que intervendrán en el cálculo del punto a interpolar.

Para explicar la elaboración del variograma en forma práctica se va a tomar un ejemplo simple<sup>1</sup>, donde se irán desarrollando los procedimientos para su construcción. En la figura 4.1 se tiene una serie de siete puntos (a, ...g) que corresponden a la muestra para generar el variograma y sus valores se observan en la Tabla 1.1.

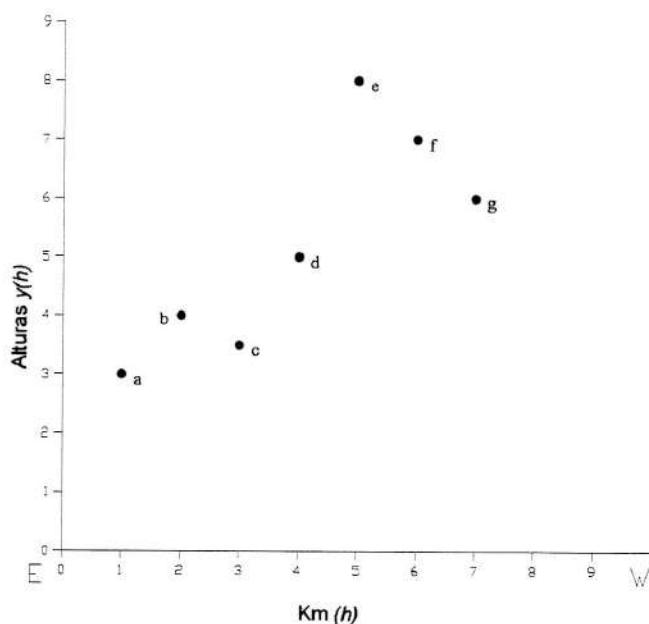


Figura 4.1. Valores de la variable "alturas" en diversos puntos situados en una linea.

<sup>1</sup> Ejemplo extraído del libro de Bosque Sendra, *Sistemas de información geográfica*, Ediciones Rialp, Madrid, p. 195 a 197.

A partir de los datos iniciales, teniendo en cuenta que el variograma relaciona la variación de Z entre datos en función de la distancia, el proceso consiste en formar pares de valores que estén separados a 1, 2, 3 ..... unidades de distancia, a lo largo de una dirección concreta del plano, en este caso (este-oeste). Recordemos que kriging realiza este procedimiento en varias direcciones, lo que hace tener la variación altimétrica del punto a interpolar alrededor de todo el entorno y evita que solamente tenga la influencia de un sector.

En la Tabla 1.2 se observa las parejas de puntos separados a 1 km de distancia ( $H=1$ ), formando un grupo, el mismo criterio se utiliza para los puntos que estén separados a una distancia de 2, 3, 4 y 5 km más allá no existen puntos con una separación superior. Sobre cada grupo se obtiene su variación altimétrica y como se puede observar en los resultados, aquellos datos con menor distancia son los que tienen varianzas mínimas, siendo las variables que puedan explicar el valor del punto a interpolar.

La Tabla 1.3 muestra los valores  $\gamma(h)$  del variograma empírico, con las dos variables para estimar el valor de la cota Z del punto a interpolar, como son la variación altimétrica de un conjunto de datos y la distancia que los separa, que están representados en la figura 4.2.

Tabla 1.1. Valores iniciales

Punto	Altura	Distancia
a	3	1
b	4	2
c	3,5	3
d	5	4
e	8	5
f	7	6
g	6	7

Tabla 1.2. Cálculo del variograma

H=1			H=2			H=3		
$z_i$	$z_j$	$(z_i - z_j)^2$	$z_i$	$z_j$	$(z_i - z_j)^2$	$z_i$	$z_j$	$(z_i - z_j)^2$
a:3	b:4	1	a:3	c:3,5	0,25	a:3	d:5	4
b:4	c:3,5	0,25	b:4	d:5	1	b:4	e:8	16
c:3,5	d:5	2,25	c:3,5	e:8	20,2	c:3,5	f:7	12,2
c:5	e:8	9	d:5	f:7	4	d:5	g:6	1
e:8	f:7	1	e:8	g:6	4			
f:7	g:6	1						
$\sum = 14,5$			$\sum = 29,45$			$\sum = 33,2$		
H=4			H=5					
$z_i$	$z_i$	$(z_i - z_i)^2$	$z_i$	$z_i$	$(z_i - z_i)^2$			
a:3	e:8	25	a:3	f:7	16			
b:4	f:7	9	b:4	g:6	4			
c:3,5	g:6	6,25						
$\sum = 40,25$			$\sum = 20$					

Tabla 1.3. Resultados

H	$\gamma(h) = \frac{\sum (z_i - z_j)^2}{2 \cdot N}$
1	1.2
2	2.9
3	4.2
4	6.6
5	5

Una vez hallado el variograma empírico se puede ajustar a los puntos que conforman el mismo una función matemática, que en el caso del Surfer 6.04 presenta siete opciones: *Esférica*, *Exponencial*, *Lineal*, *Gausiana*, *Efecto ondulación (Hole Effect)*, *Cuadrática* y *Cuadrática racional*, que definen finalmente el modelo matemático llamado *variograma teórico* que mejor se ajusta a los datos observados y representa su variación altimétrica.

Según Delgado García, Cardenal Escarcena y Gómez Molina (2002), del variograma se deducen algunos parámetros fundamentales: como el entorno de cada punto a interpolar donde existe autocorrelación espacial y el tipo de datos que se tiene. Además el variograma teórico se utilizará para el cálculo de asignación de pesos a cada dato.

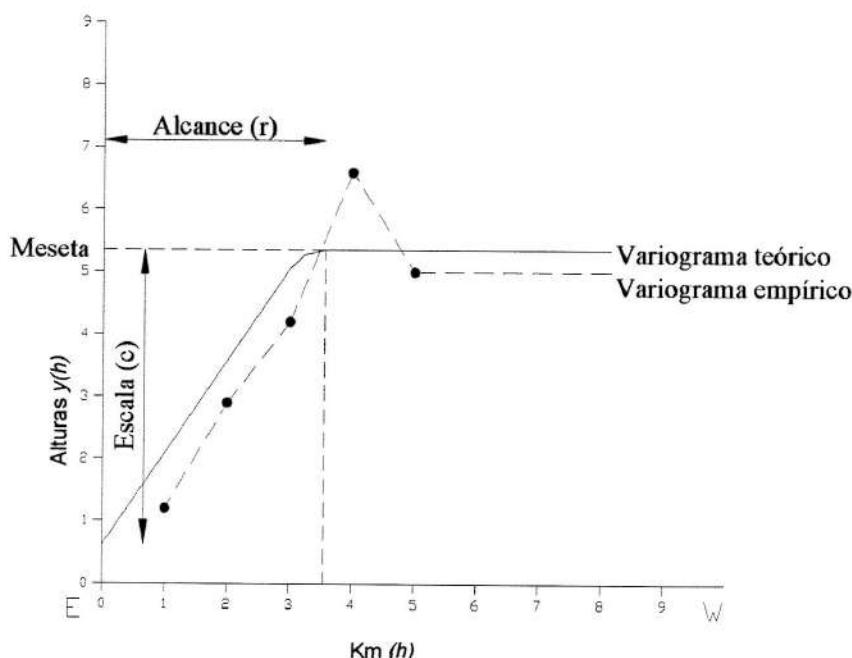


Figura 4.2. Variograma de la variable "alturas"

La función matemática que mejor se ajusta a los datos para representarlos, corresponde en este caso al modelo Esférico y su ecuación es:

$$\gamma(h) = c \left[ \frac{3h}{2r} - \frac{h^3}{2r^3} \right] , \quad h < r$$

$$\gamma(h) = c , \quad si \quad h > r$$

En este modelo esférico se distinguen varios parámetros esenciales para la descripción de cualquier variograma:

**Alcance ( $r$ ):** está definido como la distancia ( $h$ ) a partir de la cual el valor de  $\gamma(h)$  se estabiliza e indica la existencia de autocorrelación espacial de la variable y define la distancia del entorno de cada punto a interpolar. Por lo tanto, la autocorrelación está solo dentro del alcance ( $r$ ) del variograma y más allá no existe autocorrelación de las variables con el punto a interpolar.

**Meseta o sill ( $c$ ):** es el valor estable de  $\gamma(h)$  y coincide precisamente con el valor de la varianza normal de esa variable.

La nube de puntos y la función matemática que mejor se ajusta a esos datos está dividida en dos partes:

Una es la pendiente que asciende desde el cero hasta la meseta y de acuerdo a su pendiente se puede distinguir que tipo de variable se tiene. Si la pendiente es muy fuerte, la variable es poco continua, es decir, cambia de valor rápidamente en distancias reducidas. Si por el contrario, la pendiente es suave indica que la variable es continua, debido que su valor no varía en distancias cortas.

La otra parte es la horizontal que está más allá del alcance y como se indicó anteriormente representa los puntos que están fuera del entorno de la variable a interpolar, donde no existe autocorrelación espacial.

#### 4.2.2. Cálculo de las ponderaciones

Luego de ajustar una función matemática a los datos obteniendo el variograma teórico, del mismo se obtienen los valores para la asignación de pesos a los datos del entorno del punto a interpolar donde existe autocorrelación espacial.

El cálculo de asignación de pesos se realiza en forma matricial para cada dato, se aplica de acuerdo a la distancia del punto a interpolar y la distancia entre datos, ambos

valores se estiman a partir de los valores del variograma por métodos de cálculo matricial (Bosque Sendra, 1992).

Una vez calculadas las ponderaciones de cada lugar se puede obtener la interpolación en ese punto mediante la ecuación:

$$Z_x = \sum_j W_{xj} \cdot Z_j$$

siendo  $W_{xj}$  la matriz de ponderaciones calculada para el punto de cálculo  $x$  y  $Z_j$  el valor de la altura en el punto muestral  $j$ .

Igualmente se puede determinar el error estadístico que afecta a la interpolación en ese punto  $Error(Z_x)$ , calculado mediante la ecuación:

$$Error(Z_x) = \sum_j W_{xj} \cdot \gamma(D_{xj})$$

siendo  $\gamma(D_{xj})$  el valor del variograma teórico para la distancia  $D_{xj}$  que separa el punto calculado  $x$  de cada punto muestral  $j$ .

Finalmente se puede considerar que es destacable de kriging, la utilización del variograma para definir la existencia de autocorrelación espacial en forma estadística y determinar entonces cual es el entorno del punto a interpolar y más allá de este, los datos no tendrán influencia en el cálculo. Como segundo aspecto la asignación de pesos en función de la distancia, para que los datos más próximos que tienen valores similares tengan mayor influencia en la interpolación.

Una de las dificultades que presenta el método, es el hecho que puede resultar difícil determinar una función que se ajuste a la variación altimétrica entre datos y determinar las constantes, donde una mala elección puede producir grandes errores.

Otro inconveniente que surge es el hecho de utilizar la varianza entre datos y una función estadística que los represente, el método puede suavizar los cambios bruscos de pendiente o líneas de drenaje.

#### 4.3. FUNCIONES DE BASE RADIAL

El método de Funciones de Base Radial contiene un diverso grupo de interpoladores, que utilizan una ecuación de base dependiente de la distancia entre el punto interpolado y dos datos del entorno. Estas ecuaciones base son diferentes funciones sobre las cuales se debe seleccionar una para el proceso de interpolación. Todos los métodos de Funciones de Base Radial tienen la propiedad de ser locales y exactos interpoladores, por lo tanto, en el caso que un nodo de la grilla coincida con un dato del muestreo se le asigna el valor de este último.

El valor de Z estimado del punto a interpolar  $x_0$  se expresa de la siguiente forma:

$$Zx_0 = \sum_1^n a_i \cdot F(d_i)$$

donde  $F(d_i)$  es la función base radial que debe seleccionar el usuario del grupo que ofrece el método y  $a_i$  los coeficientes obtenidos de la resolución de un sistema lineal de  $n$  ecuaciones, siendo  $n$  el número de datos próximos que intervienen en el cálculo de la interpolación de  $x_0$ .

Para la selección de una función base se optó por seguir las recomendaciones de programa Surfer versión 6.04 (Golden Software Inc., 1997) y el trabajo realizado por Aguilar M.A., Aguilar J.F., Carvajal F., Aguera. F. (2002), donde consideran la función Multicuadrática como la que ofrece los mejores resultados, tanto en términos estadísticos como el comportamiento visual del modelo digital. Esta función como las demás contienen dos parámetros, uno es la distancia para determinar el peso que se aplicará a los datos del entorno cuando se está interpolando el nodo de la grilla, de esta forma tendrán mayor peso los datos más próximos del punto a interpolar y el otro parámetro es un factor suavizador.

La función multicuadrática es la siguiente:

$$F = \sqrt{h^2 + R^2}$$

Donde  $h$  es la distancia entre el dato y el punto a interpolar, que define el peso de los datos de acuerdo a la distancia que se encuentran del nodo, de esta forma los datos próximos al punto a interpolar por tener cotas más parecidas tendrán mayor peso en el cálculo y los más alejados su incidencia será ínfima.

El otro parámetro que interviene en la función es el factor suavizador  $R^2$ , universalmente no existe un método para determinar un óptimo valor de este coeficiente y de esta forma lo puede experimentar el usuario. Estos tipos de factores pueden modificar

sensiblemente la superficie real perdiendo precisión y se pueden perder detalles morfológicos del terreno. Por lo tanto, como en este trabajo se intenta generar modelos digitales de calidad que puedan adaptarse a las irregularidades del terreno, se recomienda experimentar el método de Funciones de Base Radial sin utilizar el factor suavizador.

Por ser un método local, para la interpolación se puede definir un método de búsqueda, como se desarrolló para método de Inversa a la Distancia en la sección 4.1.1, para determinar la forma y cantidad de datos que intervendrán en el cálculo de la interpolación. En este trabajo se utilizan distintos métodos de búsqueda para hallar el tipo de parámetros que necesita el método para obtener los mejores modelos digitales.

## 4.4. CURVATURA MÍNIMA

El procedimiento que aplica este método de interpolación, consiste en dividir el dominio completo del modelo en celdas de forma rectangular o cuadradas, correspondientes a la zona encerrada por los nodos de la grilla, y luego dentro de cada celda se define una función que representa la superficie del terreno.

Un problema derivado de utilizar este método son las discontinuidades formadas entre los bordes de las celda vecinas, para ello se tiene que optar por una función que pueda evitar o minimizar este error (Girardi, 1990).

Para definir una función en la que cada celda pueda representar a la superficie, es necesario realizar un ajuste a las coordenadas XYZ de los cuatro nodos de la celda. Las coordenadas planimétricas XY están dadas por la grilla, definida por el usuario antes de comenzar la interpolación, pero para el cálculo de la altura Z de los vértices de la celda, el método utiliza un algoritmo de función inversa a la distancia entre el punto de referencia y el vértice. Este tipo de interpolación se realiza en forma independiente para cada vértice, utilizando la masa de puntos de referencia dentro de un círculo crítico, cuyo centro es el nodo de la grilla.

Una vez hallados los valores de Z, se ajusta a la celda una función interpolante, donde es posible dentro de cada celda definir superficies representadas por funciones:

*Lineal, bilineal, polinomial y bicúbica.*

### 4.4.1. Interpolación con un polinomio bilineal

En este caso el método para representar la celda por una superficie define un polinomio bilineal:

$$Z = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot Y + a_3 \cdot XY$$

Para realizar un ajuste del plano a los cuatro vértices se arma un sistema de ecuaciones derivando el polinomio. Para la resolución de estos sistemas es necesario contar con los datos que son las tres coordenadas (XYZ). Como fue desarrollado anteriormente, los valores de las coordenadas XY se obtienen de la grilla y Z mediante un algoritmo de inversa a la distancia.

Una vez obtenidos los tres valores, éstos son utilizados para resolver el sistema determinando los coeficientes  $(a_0, a_1, a_2)$  de la ecuación del plano que en la celda representa la superficie del relieve.

“El sistema tiene solución única lo que asegura que en una grilla regular no existirán discontinuidades a lo largo de los bordes de las celdas vecinas” (Girardi, 1990).

#### 4.4.2. Doble interpolación lineal

Este método divide a la celda en dos triángulos en los que se interpolará un plano lineal:

$$Za = a_0 + a_1X + a_2Y$$
$$Zb = b_0 + b_1X + b_2Y$$

Como el método anterior es necesario conocer los valores de Z de los cuatro vértices, debido a que X e Y son conocidos al definir la grilla. El cálculo de Z se obtiene por algoritmos de inversa a la distancia de los puntos de referencia del entorno con respecto al nodo.

Una vez obtenidas las coordenadas planialtimétricas de los cuatro vértices, se puede resolver el sistema de ecuaciones formado al derivar los polinomios. Obteniendo como resultado final las constantes de la función lineal que representa la superficie topográfica en ese sector triangular generado en la celda.

#### 4.4.3. Interpolación por función polinomial

En este método la función interpolante que se ajusta a los cuatro vértices de la celda es un polinomio de grado 3 de 12 términos. Aplicando este tipo de funciones se logra minimizar las discontinuidades en los bordes de las celdas, dado que “la condición de borde obliga que las derivadas parciales de la función según X e Y, en los límites de las celda, coincidan con las correspondientes de las celdas vecinas” (Girardi, 1990).

Para determinar la función interpolante el método utiliza las coordenadas XYZ de los cuatro vértices de la celda, como XY están definidas por los nodos de la grilla solo queda por conocer Z, para esto el método se divide en dos partes:

- Determinar la altura de los vértices de la celda
- Obtener una función interpolante que se ajuste a la celda

##### *Determinación de la altura de los vértices de la celda*

Para obtener el valor de altura de los vértices, el método realiza el cálculo en forma independiente para cada uno. El procedimiento consiste en ajustar un plano al vértice

utilizando los  $n$  puntos de referencia que se encuentran en su entorno, siendo el nodo el centro del radio de búsqueda que define cual será su entorno que intervendrá en el cálculo. El ajuste del plano se realiza por mínimos cuadrados donde se forma el siguiente sistema:

$$Z_1 = Z + Z_x \cdot X_1 + Z_y \cdot Y_1$$

$$Z_2 = Z + Z_x \cdot X_2 + Z_y \cdot Y_2$$

$$Z_n = Z + Z_x \cdot X_n + Z_y \cdot Y_n$$

Donde:

$X_i$  e  $Y_i$ : diferencia de coordenadas entre el punto de referencia y el vértice.

$Z, Z_x, Z_y$ : constantes de la ecuación.

De este sistema se tiene que obtener las incógnitas que son las constantes  $(Z, Z_x, Z_y)$ , pertenecientes al plano que mejor se ajuste al vértice y los puntos de su entorno.

El sistema expresado en forma matricial es:

$$L = A \cdot I$$

$$L = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} Z \\ Z_x \\ Z_y \end{bmatrix}$$

La resolución de este sistema para obtener las constantes  $(Z, Z_x, Z_y)$ , se obtendrá mediante:

$$\begin{bmatrix} Z \\ Z_x \\ Z_y \end{bmatrix} = (A^t \cdot W \cdot A)^{-1} \cdot (A^t \cdot W \cdot L)$$

$$(n,1) \quad (n, x) \quad (n, 1)$$

Donde  $W$  es una matriz de peso, que le asigna a los puntos de referencia el peso en función de la distancia que se encuentran del vértice. Como lo visto en la interpolación inversa a la distancia, en estos valores de peso es importante la elección de un apropiado exponente de ponderación, que define cuales puntos tendrán mayor influencia en el cálculo.

Una vez resuelto el sistema en forma matricial quedan determinadas las constantes del plano ( $Z, Z_x, Z_y$ ), se introduce en la ecuación las coordenadas XY del vértice obteniendo el valor de su altura.

#### *Obtención de una función interpolante que se ajuste a la celda*

La función interpolante consiste en un polinomio de grado 3 con 12 términos, 3 para cada vértice ( $Z, Z_x, Z_y$ ), que nos permitirá obtener los coeficientes ( $C_n$ ) de la función:

$$Z = c_1 + c_2Y + c_3Y^2 + c_4Y^3 + c_5X + c_6X^2 + c_7X^3 + c_8XY + c_9XY^2 + c_{10}XY^3 + c_{11}X^2Y + c_{12}X^3Y$$

Como el caso anterior la solución al problema se obtiene realizando un ajuste por mínimos cuadrados, derivando la función presentada anteriormente se obtiene un sistema de ecuaciones que nos permitirá obtener los coeficientes ( $C_n$ ) de la función interpolante, mediante la resolución del sistema en forma matricial:

$$\begin{matrix} C \\ (12,1) \end{matrix} = \begin{matrix} B^{-1} \\ (12,12) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} Z \\ (12,1) \end{matrix}$$

$C : (c_1, c_2, \dots, c_{12})$  12 coeficientes de la función que se ajusta a la celda.

$B$ : al derivar la función interpolante se genera un sistema de ecuaciones que esta expresado matricialmente en  $B$ .

$Z : (Z, Z_x, Z_y)$ , constantes del plano que mejor se ajusta al vértice de cada celda para determinar su altura.

Finalmente dentro de cada celda de la grilla se define una función polinomial que representa una superficie, la cual posee curvatura mínima.

## 4.5. VECINO MÁS PRÓXIMO

Partiendo de una distribución irregular de datos, de los cuales se quiere obtener la cota (Z) de los nodos de una grilla regular, el método de *vecino más próximo*, consiste en admitir que cada nodo se parece, más que a ningún otro, al punto de referencia más cercano. Con esta suposición, este método de interpolación para determinar el valor de altura de un punto, consiste simplemente en asignarle el valor del punto de referencia más próximo a él. Este procedimiento se realiza mediante la construcción de *polígonos de Voronoi* o de *Thiessen*, siendo el método de tipo local, ya que interviene un solo punto de referencia en el cálculo de la interpolación.

Dado un muestreo de puntos de referencia, el método determina sobre cada uno de ellos áreas de influencia sobre su entorno, donde no interviene otro dato y esto se logra mediante la construcción de los polígonos de Thiessen. De esta forma el valor del punto a interpolar queda determinado por el polígono que lo contiene.

### 4.5.1. Polígonos de Thiessen

El concepto de estos polígonos se basa en subdividir la zona que abarca el modelo en un conjunto de polígonos convexos a partir de los puntos de referencia. La construcción de los polígonos de Thiessen como muestra la figura 5, consiste en: dados dos puntos  $P_i$  y  $P_j$  contenidos en un plano, la mediatrix  $M_{ij}$  del segmento  $P_i - P_j$  divide al plano en dos semiplanos  $V_i$  y  $V_j$ , donde el semiplano  $V_i$  contiene todos los puntos cuya distancia a  $P_i$  es menor que a  $P_j$ , y el semiplano  $V_j$  contiene el resto (Martinez Marín, 2000).

Considerando que se trabaja con un conjunto de varios puntos, el concepto anterior se aplica a otros puntos  $P_n$ , donde cada uno de ellos se asocia a un semiplano  $V_n$  que contiene todos los puntos del plano más cercano a  $P_n$ , obteniendo finalmente polígonos convexos que cubren toda el área de estudio.

De este modo, a partir de un conjunto de puntos de referencia se establecen los polígonos que delimitan el entorno a cada uno de ellos, la parte del espacio que está más cerca de él que de cualquier otro. Por lo tanto, cada dato queda asociado y le atribuye al polígono sus valores altimétricos, ocupando toda su extensión. Donde cada nodo de la grilla o cualquier otro punto a interpolar le será asignado el valor Z del polígono que contenga.

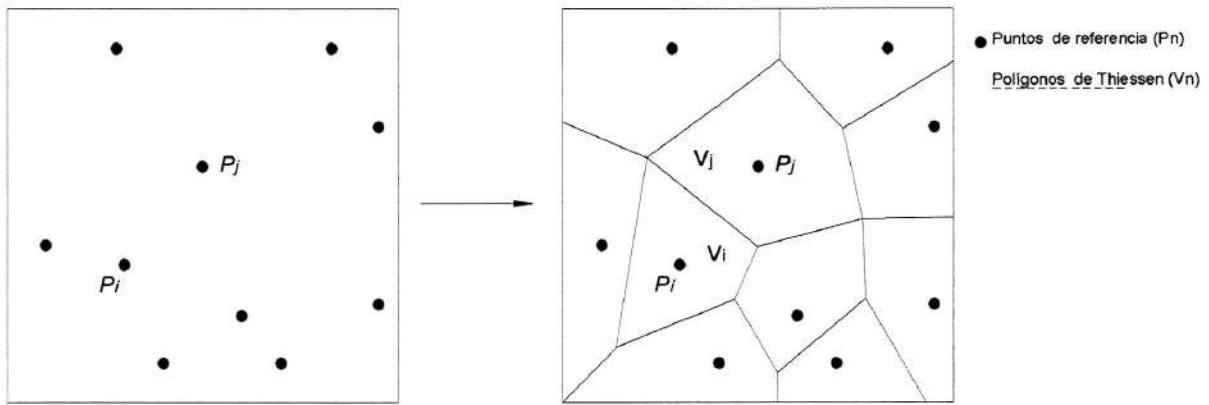


Figura 5. Polígonos de Thiessen

Al tener el polígono en todo su dominio el mismo valor altimétrico, dado por el punto dato que lo contiene, produce un plano llano, generando en los límites con otros polígonos un modelo con forma escalonada de acuerdo a sus valores altimétricos.

Esta condición y el procedimiento de interpolación no lo hace apto para generar modelos digitales del terreno de alta precisión. Pero igualmente no se debe considerar como un método inutilizable, donde los polígonos de Thiessen por recomendaciones del Golden Software Inc. (1997), son apropiados para generar MDT cuando los datos tienen poca variabilidad altimétrica entre ellos y están espaciados. Utilizando la propiedad de estos polígonos de cubrir grandes zonas que toma el valor ( $Z$ ) del punto de referencia contenido en su interior y por lo tanto, todos los puntos que estén en el interior del polígono tendrán el mismo valor de ( $Z$ ).

El caso del ejemplo de este trabajo que tiene una gran distribución de puntos que se encuentran muy próximos, contrario a las características de este método que su fuerte son los puntos espaciados, por eso es mejor la elección de otro método que pueda utilizar mejor este tipo de muestreo.

Se debe tener en cuenta que este método en principio fue ideado para el análisis de datos meteorológicos (Thiessen, 1911), pero su empleo puede ser aplicado en otros campos que no sea generar superficies topográficas. Por ejemplo son utilizados en las zonas donde se encuentran instalados una distribución de pluviómetros sobre una extensa área, donde la construcción de los polígonos de Thiessen permite dividir el área donde cada pluviómetro tiene su dominio. De acuerdo a los datos que suministra cada instrumento, se puede obtener la lámina de agua absorbida por cada zona mediante la confección de un modelo digital y poder realizar los análisis de suelo requeridos.

## 4.6. TRIANGULACIÓN CON INTERPOLACIÓN LINEAL

El método es conocido por sus siglas *TIN* que proviene de su denominación inglesa (Triangulated Irregular Network). El concepto que utiliza el método para interpolar, consiste básicamente en dividir el dominio completo del modelo en triángulos adosados, donde esta estructura triangular se genera a partir de los puntos de referencia que constituyen los vértices de los triángulos. Definiendo un plano cada tres puntos no colineales, donde cada uno de ellos resulta con atributos de área, perímetro, altitud, pendiente y orientación. Obteniendo como resultado una *red de triángulos irregulares*, que se extiende sobre toda la superficie del modelo en función de las irregularidades del relieve y de acuerdo a las características de cada plano se puede obtener por interpolación lineal el valor estimado de cualquier punto contenido en su interior.

La generación de un *TIN*, se compone básicamente de dos partes: la triangulación propiamente dicha y la selección de puntos que debe usarse como vértices (Felicísimo, 1999).

### 4.6.1. Triangulación

Para construir la triangulación de un conjunto de puntos de referencia distribuidos irregularmente y obtener una malla triangular lo más regular posible, donde los vértices que conforman los triángulos sean los puntos de referencia, es necesario que se realicen una serie de procedimientos. La gama de posibilidades para formar triángulos en todo el dominio del modelo es amplia, pero no todas ofrecen los mejores resultados y para evitar construir estructuras erróneas, los triángulos que conforman la red deben tener una serie de propiedades. Por eso, para obtener una apropiada *triangulación*, el método más habitual para su construcción comprende dos procedimientos, que imponen las condiciones para que los triángulos representen la topografía del terreno, primero en la generación de los polígonos de *Voronoi* o de *Thiessen* y luego la *Triangulación de Delaunay*.

#### *Polígonos de Thiessen*

Los polígonos de *Thiessen* definen el área de influencia de un punto de referencia, y su construcción se basa en subdividir el área del modelo en un conjunto de polígonos convexos. Donde cada polígono contiene solamente un punto de referencia del cual toma su valor altimétrico. (Para un desarrollo más amplio ver el método de Vecino más Próximo, sección 4.5.1).

Como el método TIN utiliza los vértices de la triangulación como puntos de referencia, este primer procedimiento define el entorno de cada dato sobre el cual tiene dominio y luego estos polígonos son utilizados para guiar la correcta construcción de la triangulación.

### *Triangulación de Delaunay*

Una vez obtenidos los polígonos se puede, a partir de estos, construir la triangulación de Delaunay. El método simplemente consiste en conectar los puntos de referencia que comparten un lado del polígono de Thiessen, obteniendo una malla triangular conocida como *Triangulación de Delaunay*, ver figura 6.1.

Los dos procesos que utiliza el método para construir la red triangular produce que los triángulos que la componen estén completamente adosados, de forma que puedan adaptarse a los distintos rasgos del relieve. Para ello, la Triangulación de Delaunay construye la red con los siguientes atributos:

- Construir triángulos equiláteros, con ángulos iguales o próximos a 60 grados.
- Los puntos de la red forman los vértices de los triángulos.
- La estructura se genera de tal manera que los triángulos de la red pueden estar conectados por un vértice, pero los lados de los triángulos no se intersectan con otros lados, por lo tanto, no existe superposición.
- Dado un triángulo A, no existe otro punto de la triangulación en el interior del círculo que pasa por los vértices de A.

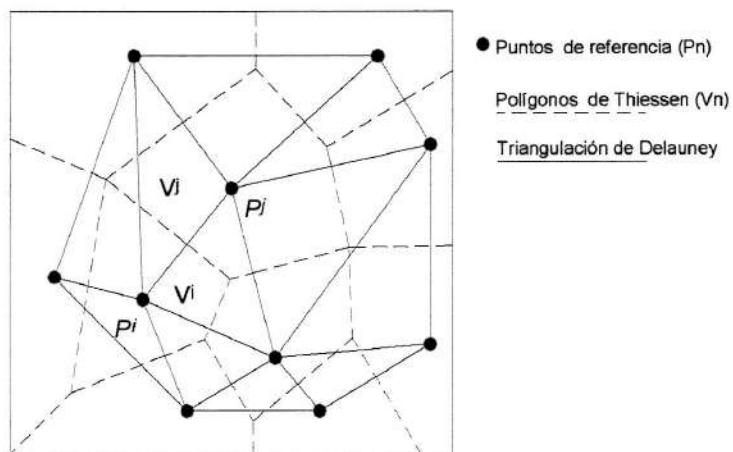


Figura 6.1. *Triangulación de Delaunay*

Para un conjunto de puntos dados, la triangulación tiene solución única, excepto en algunos casos especiales como:

Los tres posibles vértices de un triángulo son colineales, en tal caso, el algoritmo deberá avisar para que el usuario elimine uno de ellos o si es posible los desplace a otra dirección.

Cuando cuatro puntos a formar dos triángulos adyacentes pertenecen a una circunferencia y por lo tanto, pueden existir varias posibilidades de triangulación. Aquí es donde interviene la selección de los vértices que el método debe aplicar.

#### 4.6.2. Selección de vértices

Sin dudas que el mayor problema de la triangulación es la selección de los puntos que deben usarse como vértices. La forma más simple de generar una estructura TIN, sería usando todos los puntos que se tiene como dato. Por ejemplo, para desarrollar este trabajo se utiliza una restitución fotogramétrica, con una estructura vectorial donde se usa como punto de partida para generar el modelo un conjunto de puntos que contiene todos los nodos de las curvas de nivel como vértices.

Este modelo masivo no es deseable, principalmente por la gran cantidad de puntos y en la distribución de los mismos sería necesario construir una red triangular que ocupa mucho espacio y con varias operaciones de cálculo. Donde es posible que muchos de estos puntos pertenecientes a la red no aporte información importante, muchos de ellos provienen de una digitalización rutinaria; siendo más importante los puntos que aportarían una información relevante al modelo como las *líneas críticas del relieve*: divisorias de agua, cursos de agua, caminos y cotas puntuales de altitud como cimas.

Para la solución de este problema el método debería seleccionar una menor cantidad de puntos pero que sean significativos para el modelo y que pueden representar todo el conjunto de puntos con el menor error posible.

Los dos enfoques básicos para la selección según Felicísimo (1999) son:

- Hacer una selección de puntos críticos antes de la triangulación de Delaunay, de modo que los algoritmos que lo generan, conozcan previamente el conjunto completo de vértices para construir posteriormente un modelo masivo.
- Usar un algoritmo de triangulación que realice la selección de vértices mientras construye la red.

En el programa Surfer 6.04 se desconoce el método que utiliza para la selección de vértices. Pero a modo de ejemplo el programa CARIS GIS V4.4a, en el caso de que un vértice se encuentre próximo a otro, este es descartado. Esto es determinado aplicando un rango de tolerancia por defecto o especificado por el usuario (CARIS GIS, 2003). Entre otras

opciones este programa permite modificar la propiedad del método de construir triángulos lo más equiláteros posibles, para evitar perder información en los límites del modelo donde suele ser difícil cumplir con esta condición.

Con respecto a la utilización de un algoritmo de triangulación, que realice la selección de vértices, Martínez Marín (2000) presenta un artículo donde propone un algoritmo procurando definir cada triángulo lo más regular posible, es decir, el caso óptimo equilátero.

#### 4.6.3. Interpolación

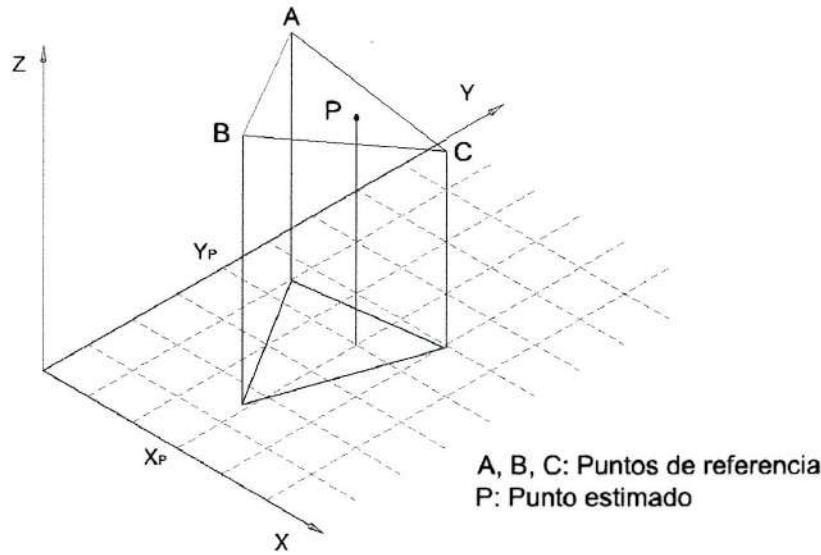
Una vez obtenida la triangulación se puede pasar al proceso de interpolación de la estructura TIN, como se desarrolló anteriormente la red está formada por triángulos, donde los vértices son los puntos de referencia, definiendo cada triángulo un plano cuya ecuación está definida por las tres coordenadas (XYZ) de cada punto y de esta forma a través de una interpolación lineal se puede obtener la altura de cualquier punto que está dentro del triángulo.

Para interpolar un punto P (figura 6.2) el método realiza una interpolación lineal, debido que la altura del punto en cuestión varía linealmente dentro del plano definido por los tres vértices del triángulo (A, B, C) que lo contiene. Por ser TIN un *método exacto*, en el caso particular que el punto a interpolar coincide algún vértice, se le asigna la altura de este.

Entones para calcular la altura del punto P, contenido en el interior del triángulo, se obtiene mediante la ecuación de un plano:

$$Z_P = A \cdot Y_P + B \cdot X_P + C$$

Los parámetros A, B y C de la ecuación del plano se determinan a partir de los nueve valores conocidos de las coordenadas X, Y y Z en los tres vértices a, b y c.



*Figura 6.2. Interpolación de un punto a partir de la ecuación de un plano*

Una de las características para destacar del método, es la utilización de los puntos de referencia como vértices de la triangulación, lo que permite representar fielmente las líneas críticas del relieve, cursos de agua, divisorias de agua, cambios bruscos de pendiente, etc. Siendo una cadena de puntos verdaderos, cuando en otros métodos serían recalculados con valores del entorno.

#### 4.7. ANÁLISIS DE SUPERFICIE DE TENDENCIA

Este método de interpolación también llamado *polinomio de regresión*, utiliza para generar Modelos Digitales del Terreno un procedimiento *global*. Por ser un método global toma todos los puntos de referencia para definir una función  $Z = f(X, Y)$ , que representa la superficie del modelo en su totalidad. Esto se logra ajustando un polinomio de grado 1, 2, 3 o incluso superior, a los valores de las alturas  $Z$  (que es la variable dependiente) en función de las coordenadas  $X$  e  $Y$ , todas ellas referidas a los puntos de referencia que actúan como variables independientes.

La ecuación para representar el modelo puede ser:

- Lineal  $Z(X, Y) = a + bX + cY$
- Bilineal  $Z(X, Y) = a + bX + cY + dXY$
- Cuadrática  $Z(X, Y) = a + bX + cY + dXY + eX^2 + fY^2$
- Cúbica  $Z(X, Y) = a + bX + cY + dXY + eX^2 + fY^2 + gX^2Y + hXY^2 + iX^3 + jY^3$

Por ser un procedimiento global que proporciona una descripción sintética de la superficie, no fue evaluado con la misma rigurosidad que los métodos locales, por lo tanto, el objetivo fue analizar las funciones que puede producir y encontrar los parámetros para generar el modelo apropiado para representar la superficie topográfica.

“Este método resulta, generalmente, inapropiado para la generación de MDE<sup>2</sup> debido a que, o el terreno es muy irregular y la función no puede representarlo, o el número de puntos a interpolar es tan grande que la determinación de los coeficientes de la función global es imposible o inestable” (Girardi, 1990).

Teniendo en cuenta la cita mencionada, se basó la experimentación de este método, donde surgió otro inconveniente a los elementos presentados y se produjo con la utilización de las coordenadas planas ( $XY$ ) del muestreo. Por ser coordenadas en Proyección Gauss-Krüger, son valores muy grandes e influyeron también en la generación de estas funciones inestables, que proporcionaron superficies que no representaban a los datos iniciales. Considerando que para obtener el valor de los coeficientes de la función es necesario resolver un sistema de ecuaciones que lleva un largo proceso y donde generan matrices de grandes dimensiones de acuerdo a la cantidad de coeficientes que tenga la función, posiblemente este tipo de valores planimétricos produjeron inconvenientes en la resolución del sistema, siendo un elemento más a tener en cuenta que intervino negativamente en la determinación de los coeficientes.

<sup>2</sup> El autor define al MDE (Modelo Digital de Elevaciones) como una representación digital del relieve del terreno, donde quedará restringida a una reproducción de la altimetría o elevaciones del terreno.

En la búsqueda de una solución para evitar este tipo de funciones, en primer término se utilizó un número mínimo de datos, pertenecientes al muestreo C que contiene 380 puntos críticos del relieve (ver sección 6.1.3), con el fin de aliviar la resolución del sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes. Con el mismo objetivo, en un segundo aspecto, se modificó el sistema de referencia, donde se tomó la esquina Sudoeste del modelo (3384000 E, 4920400 N) como el origen de coordenadas y así, tener variables pequeñas que no dificulten la operación. Esto mejoró notablemente los resultados construyendo modelos más representativos.

Teniendo en cuenta estas condiciones es recomendable el uso de un muestreo con los datos más representativos y de variables pequeñas, principalmente XY para aliviar el proceso de cálculo en la resolución del sistema de ecuaciones y asegurar la obtención de una función que se ajuste a los datos de referencia.

Considerando la forma del relieve que constituye el Cerro Chenque, se estableció que de los cuatro polinomios de regresión que ofrece el método, la *cuadrática* y *cúbica* por sus características eran las únicas que podían adaptarse a las irregularidades del relieve y generar el modelo más representativo.

En la figura 10.9 se presenta el modelo digital del terreno y las curvas de nivel obtenidos mediante la superficie de tendencia cúbica, utilizando el muestreo irregular C con 380 puntos.

Realizando una inspección visual de la imagen perspectiva y las curvas de nivel obtenidas a partir del modelo, se observa una versión simplificada de la realidad muy suavizada, donde la superficie de tendencia cúbica no pudo adaptarse a las irregularidades del terreno.

Usando una de las opciones del programa SURFER 6.04, el mismo permitió obtener los coeficientes del polinomio seleccionado y de esta forma poder analizar en forma numérica el ajuste de las funciones cuadrática y cúbica, respecto a los datos del muestreo.

Los parámetros para evaluar la calidad de las superficies, se realizaron mediante el *Error Cuadrático Medio (ECM)* y el *coeficiente de determinación ( $R^2$ )*, este último considerado como el más importante para este caso en particular. Donde mide el grado de ajuste de la función obtenida respecto a los datos iniciales del muestreo, los valores obtenidos se encuentran entre  $0 \leq R^2 \leq 1$ , cuando  $R^2$  tiende a cero, el ajuste de la superficie generada con los datos es pésima y cuando se acerca a 1 es excelente. En la práctica se dice que el ajuste comienza a ser razonable cuando el valor es mayor que 0,8.

En las experiencias realizadas se obtuvieron los siguiente resultados:

COMPARACIÓN - (Z <sub>i</sub> ) DE CADA MUESTREO vs (Z) ESTIMADO		
MUESTREO C (380 PUNTOS)		
Función	CUADRÁTICA	CÚBICA
ECM	31,52	29,53
R <sup>2</sup>	0,93	0,93

ECM : Error cuadrático medio

R<sup>2</sup>: Coeficiente de determinación

De acuerdo a los resultados obtenidos tanto en forma gráfica como numérica se desprenden algunas conclusiones:

Los valores obtenidos por el coeficiente de determinación en ambos casos R<sup>2</sup> = 0,93, se acerca a 1, lo que indica un buen ajuste de la superficie de tendencia respecto a los datos iniciales. Y a su vez, esto afirma que para evitar funciones inestables es necesario inevitablemente utilizar la menor cantidad de datos y que en lo posible sean los más característicos de los aspectos topográficos del relieve.

Las dos ecuaciones de plano experimentadas , cuadrática y cúbica prácticamente no presentaron diferencias para este caso, teniendo el mismo grado de ajuste, pero la segunda tuvo levemente un menor ECM.

A pesar de haber tenido un buen grado de ajuste R<sup>2</sup> con un valor muy cercano a 1, este método no se debe tener en cuenta cuando se desea representar un modelo digital del terreno fielmente al real. Debido que estos polinomios por ser globales permiten representar superficies de tendencia continuas en todo la extensión de su área y por lo tanto, generan un modelo muy suavizado y en general poco realista, proporcionando una descripción sintética de la superficie topográfica. Este tipo de modelos generados se produce debido a que la topografía del terreno es muy irregular y una función no puede representar las variaciones del relieve con sus altos y bajos.

Este método no resulta apropiado para representar modelos digitales de buena calidad, se debe pensar su aplicación, en los casos donde todo el dominio del modelo posee una mínima variación espacial de las variables que lo conforman, la cual puede ser representada adecuadamente por la superficie de tendencia. En este caso es posible observar el tipo de variables que se tiene o a que tienden los valores de un conjunto de datos.

## **5. DESEMPEÑO O FIDELIDAD**

La construcción de un MDT de buena calidad y que represente con la mayor precisión la topografía del terreno, depende fundamentalmente del tratamiento de dos etapas. Esto se refiere primero a la *adquisición de datos* y luego al *proceso de conversión de datos* a través de algoritmos de interpolación.

Sobre la adquisición se debe lograr una buena densidad y distribución de datos y en lo posible la medición de los mismos con la mayor precisión, determinando aquellos puntos y líneas críticas del relieve.

La otra etapa, la de conversión de datos, esta referida a los métodos de interpolación que deben seleccionarse de acuerdo al tipo de datos obtenidos en el primer paso y a los requerimientos de salida. En este proceso es importante tener en cuenta las características operacionales del programa, ya que puede existir diferencias en la cantidad de opciones y parámetros para definir cada método de interpolación.

Para realizar esta experiencia fue seleccionado un cerro de grandes dimensiones, donde la captura de datos se realizó por técnicas fotogramétricas que permitieron adquirir una gran densidad de información sobre toda la extensión del terreno.

El área corresponde al “Cerro Chenque”, ubicado en Comodoro Rivadavia, Provincia de Chubut. La zona seleccionada tiene 1400 metros en dirección de la (X) por 800 metros en la dirección de la (Y) y se puede observar en la figura 1.

### **5.1. MÉTODO**

El objetivo de este trabajo es realizar en una evaluación sobre la fidelidad de varios métodos de interpolación para la generación de modelos digitales del terreno. Las distintas experiencias fueron analizadas a través de una *comparación estadística y otra gráfica*.

Para realizar la evaluación estadística de las *grillas generadas* por cada método de interpolación es necesario contar con un marco de referencia comparativo. En este tipo de trabajo las opciones para generar un marco de referencia son:

- La confección de una grilla con valores altimétricos, elaborada por técnicas fotogramétricas y de forma que coincida estructuralmente con las grillas generadas (Palleja y Passini, 1984).
- La utilización de métodos topográficos como la taquimetría para el levantamiento de datos y elaborar una grilla con las mismas características que la mencionada anteriormente (Ugrin, 1990).

- Otra posibilidad, consiste en la selección de una muestra de puntos de referencia con una distribución irregular en distintos sectores del terreno, para evaluar el grado de ajuste con las grillas generadas.

Ninguna de las tres opciones puede ser aplicada para el caso particular de este trabajo, debido a que la adquisición de datos se obtuvo de una restitución fotogramétrica cuyos datos tienen una distribución irregular. Esta disposición de los datos no es la más apropiada para establecer como marco de referencia en la comparación estadística con las grillas regulares generadas por cada método de interpolación. Al superponer un muestreo con distribución irregular de datos con la grilla regular generada, pueden ser evaluados los nodos de la grilla coincidentes con los puntos de referencia y con la posibilidad de ser los menos importantes en la morfología del relieve. Este tipo de comparación obtendría resultados insuficientes para los objetivos de este trabajo, siendo una grilla el marco de referencia más adecuado. Esto llevó a crear un marco de referencia obtenido por la generación de una grilla de puntos obtenidos por alguno de los métodos de interpolación estudiados en este trabajo, que represente con la mayor fidelidad los distintos rasgos morfológicos del Cerro Chenque.

La elección del método de interpolación para generar la grilla de referencia se efectuó después de haber estudiado los distintos métodos y de realizar todas las experiencias. El análisis se realizó a través de una comparación gráfica de las curvas de nivel y perfiles topográficos generados por cada método con respecto a los producidos por la restitución. Sobre todos los métodos experimentados se obtuvieron algunos resultados satisfactorios, entre ellos se destaca Kriging, Funciones de Base Radial y Triangulación con Interpolación Lineal (TIN). Sobre los dos primeros las diferencias fueron mínimas, mientras que TIN tuvo algunas discrepancias negativas en los límites del modelo. Finalmente se llegó a la conclusión que Kriging obtuvo los resultados más óptimos para generar la *grilla de referencia* en la comparación estadística, por ser el método que mayor adaptación tuvo a la restitución en todos los sectores.

En la figura 7 se pueden observar las curvas de nivel obtenidas por kriging y las correspondientes a la restitución.

El procedimiento para el análisis de comparación de los diferentes métodos de interpolación, consistió en realizar varias experiencias con distintas densidades y distribuciones de muestreo, que generaron varios MDT para su posterior evaluación. Las grillas generadas por estos métodos fueron creadas de forma que coincidieran estructuralmente con la grilla de referencia creada por kriging.

Las grillas de un MDT son matrices numéricas con valores de altura obtenidos por interpolación y el proceso de comparación consistió básicamente en cruzar la grilla de

referencia con la generada, obteniendo una matriz con los valores de discrepancias respecto de la referencia.

El proceso empleado para la realización de la comparación estadística se dividió en dos etapas: una consistió en un análisis global del modelo sobre todas las experiencias y otra más detallada sobre los mejores casos de cada método de interpolación para determinar discrepancias en forma localizada.

Se determinó que las grillas regulares generadas con una equidistancia de 20 m podían adaptarse fielmente al relieve y representar los finos rasgos morfológicos del Cerro Chenque. Otro factor que se tuvo en cuenta para definir el tamaño de la grilla, es la densidad y distribución del muestreo de datos, debido a que algunos métodos de interpolación necesitan para estimar el valor del nodo de la grilla una cierta cantidad de datos del entorno.

Entonces el área quedó determinada de la siguiente forma:

Dimensiones	1400 metros (X)
	800 metros (Y)
Límites	X <sub>MÁX</sub> = 3.385.400      X <sub>MÍN</sub> = 3.384.000
	Y <sub>MÁX</sub> = 4.921.000      Y <sub>MÍN</sub> = 4.920.400
Grilla	41 líneas cada 20 m en dirección x 71 líneas cada 20 m en dirección y
Puntos	1190 vértices de la grilla

En la segunda etapa de evaluación de los MDT, se realizó una *comparación gráfica* de las curvas de nivel y perfiles topográficos generados por cada método de interpolación. Para este análisis visual se uso como marco de referencia comparativo las *curvas de nivel de la restitución* por ser los datos originales. La metodología de trabajo utilizada en el Servicio de Hidrografía Naval (SHN), el equipamiento empleado y la experiencia del operador fotogramétrico<sup>3</sup> que realizó la restitución garantizan “a priori” la confiabilidad métrica de la representación altimétrica del Cerro Chenque.

---

<sup>3</sup> La restitución fue realizada en la División Fotogrametría del SHN, por el operador fotogramétrico Juan Sernadas.

## 6. LEVANTAMIENTO ALTIMÉTRICO DEL CERRO CHENQUE

La adquisición de datos para generar los distintos modelos digitales, se realizó mediante una restitución fotogramétrica, elaborada por la División Fotogrametría del Servicio de Hidrografía Naval.

La información que se obtuvo de la restitución sobre el Cerro Chenque son, curvas de nivel y líneas críticas del relieve, todos estos elementos tiene una salida mediante un archivo de estructura vectorial para el proceso de extracción de la información.

Datos de vuelo:

- Focal de cámara: 153,12 mm
- Escala de vuelo: 1:20.000
- Esc. de restitución: 1:5.000

El trabajo de restitución se realizó en los siguientes períodos:

- Fecha de vuelo: Octubre de 1999
- Apoyo: Enero de 1999
- Restitución: Septiembre de 2000

### 6.1. Tipos de muestreo

Para la evaluación sobre la fidelidad de los modelos digitales del terreno, el proceso de muestreo se dividió en tres etapas, para estudiar el comportamiento de los métodos de interpolación en la generación de un MDT con distintas densidades y distribuciones de muestreo.

La cobertura base disponible por la restitución para confeccionar el tipo de muestreo es el siguiente:

- Curvas de nivel con una equidistancia de 20 m, donde la cota máxima es de 200 m producida en los picos del Cerro y la mínima de 20 m.
- Una gran cantidad de barrancas, fundamentales para el modelo debido que marcan los cambios bruscos de pendiente.
- Cursos de agua temporarios que se encuentran en el sector norte del modelo, formando parte de las líneas críticas del relieve.
- Caminos, sendas y calles pertenecientes al sector Norte de la Ciudad de Comodoro Rivadavia.

Haciendo una clasificación del terreno para determinar la densidad y tipo de muestreo, se realizó primero una evaluación de los elementos disponibles donde fueron

escogidos, las curvas de nivel, barrancas y los cursos de agua. Mientras que, los caminos fueron excluidos para formar parte del muestreo, la obtención de estos por técnicas fotogramétricas en lo que se refiere a las cotas de los mismos no es confiable.

Sobre la clasificación de la información capturada de la topografía del cerro, los muestreos seleccionados fueron divididos en tres grupos, denominados muestreos A, B y C.

#### 6.1.1. Muestreo A

El muestreo A está formado por los datos provenientes de la clasificación del terreno desarrollado en el punto anterior, donde fueron seleccionados: curvas de nivel, barrancas y cursos de agua. Sobre estos se extrajeron todos los vértices de los vectores que representaban estos elementos y que se encontraban dentro de los límites del modelo (1400 m por 800 m).

Sobre este muestreo se obtuvo una cantidad de 1020 puntos, que forma una gran densidad sobre la mayor parte del terreno, la distancia entre vértices sobre los vectores varían debido que tienen que adaptarse a las irregularidades del relieve. La equidistancia de la grilla es de 20 m y esta distribución de datos hace que cada nodo de la grilla en el cálculo de la interpolación posea varios puntos de referencia en su entorno.

En la figura 8.1 se encuentra el muestreo irregular con 1020 puntos, obtenidos de los elementos proporcionados por la restitución.

#### 6.1.2. Muestreo B

Sobre el primer muestreo se obtuvieron algunos resultados desfavorables en los límites del modelo con algunos métodos de interpolación, que no asignaron valores a los nodos de la grilla cuando tienen un insuficiente número de datos para el cálculo de interpolación, generando sobre este sector del modelo un *plano bajo*. Estos casos sucedieron con Inversa a la distancia, Vecino Próximo y la Triangulación con Interpolación Lineal, que por ser un método que no puede extraer, en esta zona problemática donde existe poca información no podía triangular y no pudo asignar valores a los nodos de la grilla en cuestión dejando espacios vacíos. Este problema derivó en extender la densidad de muestreo fuera de los límites del modelo preestablecido para solucionar este aspecto y los nodos del límite a interpolar tuvieran puntos suficientes en su entorno para realizar la operación de acuerdo al método de búsqueda especificado y la cantidad de datos indicados para intervenir en el cálculo.

Esto llevó a realizar una *segunda densidad de muestreo* que abarcaban los datos que se encontraban hasta 100 m fuera del límite fijado del modelo y funcionara como una ayuda en esta zona problemática, sin modificar los límites previos del modelo. Debido que el

programa utilizado en este trabajo permite definir el tamaño de la grilla para generar el modelo y también acepta en el proceso de interpolación datos externos a los límites de la grilla.

Para este muestreo se utilizó la misma cobertura base que el anterior, obteniendo una cantidad de 1314 puntos de referencia y gráficamente pueden ser observados en la figura 8.2.

#### 6.1.3. Muestreo C

En el muestreo C se intentó imponer una mayor exigencia a los procesos de interpolación, sobre la totalidad de los puntos de referencia pertenecientes al muestreo B (1314), se realizó una selección de las líneas críticas del relieve. De esta forma se intentó determinar aquellos algoritmos que con un mínimo de datos puede construir modelos digitales de buena calidad.

La selección de datos se realizó en forma manual, para ello fue necesario realizar una identificación de los rasgos morfológicos del terreno, donde se escogieron los datos que aportan mayor información. Los más relevantes son las líneas críticas del relieve, que para el Chenque son algunas características topográficas que marcan las curvas de nivel, las barrancas y cursos de agua.

También se realizó una selección de los nodos de las curvas de nivel, en este caso el criterio utilizado, fue localizar las líneas críticas del relieve como las divisorias de agua en las salientes y las líneas de vaguada en las entrantes. Sobre las curvas de nivel también fueron seleccionados puntos de relleno en los lugares del modelo donde no existía o era insuficiente la densidad puntos.

Aplicando este criterio se obtuvieron 380 puntos, que representa el 29 % de la totalidad de los datos (1314, muestreo B). De esta forma se puso a prueba al máximo la capacidad de los métodos de interpolación, donde tuvieron que convertir una grilla cada 20 m con datos muy distantes entre sí.

En la figura 8.3 se encuentran las posiciones de los puntos seleccionados para el muestreo irregular y las líneas críticas que posee el Cerro.

A continuación se presenta la Tabla 2 que contiene las tres clases de muestreo para desarrollar el análisis estadístico, estos son:

	Densidad de muestreo	Grillas (Equidistancia)
Muestreo A	1020 puntos	20 m
Muestreo B	1314 puntos	20 m
Muestreo C	380 puntos	20 m

Tabla 2. Clases de muestreo

Con estas tres diferentes densidades de muestreo, se intentó determinar los parámetros necesarios para utilizar correctamente los métodos de interpolación y analizar si con un muestreo de datos característicos se puede construir modelos digitales que se adapten a la topografía del terreno.

## 7. COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

A partir de las densidades de muestreo A, B, C, se generaron varias grillas con distintos métodos de interpolación. Sobre estos se aplicaron diferentes métodos de búsqueda y parámetros específicos de cada uno, de modo que una gran variedad de posibilidades para construir MDT fueron experimentados. Se generaron un total de 74 grillas, con el objetivo de analizar los resultados para definir los mejores métodos y los parámetros apropiados para generar un modelo digital de buena calidad.

Cada método de interpolación tiene una fuerte justificación matemática que los hace aconsejables en un caso y no utilizables en otro. Por eso se determinó evaluar con tres densidades de muestreo distintas, principalmente el muestreo C que tiene una menor densidad. Esto permitió definir, de acuerdo al tipo de muestreo y los requerimientos de salida, el método de interpolación apropiado.

El programa usado en este trabajo permitió guardar las grillas generadas con un formato de matriz de alturas, que fueron utilizadas mediante distintos métodos estadísticos para evaluar sus discrepancias con la grilla de referencia.

### 7.1. Experiencia con el muestreo A

A partir del muestreo irregular con 1020 puntos, se generaron varias grillas, utilizando los siguientes métodos de interpolación:

MÉTODO DE INTERPOLACIÓN	EVALUACIONES (E)
Inversa a la distancia (exponente de ponderación 1)	E01 a E07
Inversa a la distancia (exponente de ponderación 2)	E08 a E14
Triangulación con interpolación lineal	E15
Vecino próximo	E16 a E18
Mínima curvatura	E19
Funciones de base radial (Multicuadrática)	E20 a E24

Tabla3. Experiencia A

Para este caso se utilizó en todas las experiencias el muestreo irregular de 1020 puntos, donde todas las grillas tienen una equidistancia de 20 m, coincidente con la estructura de la grilla de referencia para posteriormente ser comparadas.

Los métodos de búsqueda aplicados fueron los siguientes:

MÉTODO DE BÚSQUEDA	RADIO DE BÚSQUEDA (M)	PUNTOS INTERVINIENTES
Todos		todos
Normal	200	12
Normal	100	8
Cuadrante	800	1punto/cuadrante
Cuadrante	800	2punto/cuadrante
Octante	800	1punto/cuadrante
Octante	800	2punto/cuadrante

Tabla4. Métodos de búsqueda aplicados

En el método de *Inversa a la Distancia* se aplicaron distintos exponentes de ponderación, con el fin de analizar el peso apropiado para los datos del entorno en la interpolación de un punto.

El método de *Funciones de Base Radial* contiene un grupo de varias funciones, pero solamente se utilizó la *Multicuadrática*, recomendada por varios autores como la que ofrece los mejores resultados (Golden Software Inc., 1997) y (Aguilar M.A., Aguilar F. J., Carvajal y Agüera, 2001).

## 7.2. Experiencia con el muestreo B

Los métodos de interpolación y formas de búsqueda, indicados en las Tablas 3 y 4 fueron usados para realizar la experiencia con el muestreo B, donde se aumentó la cantidad de datos del muestreo a 1314 puntos. En esta experiencia se contó con los puntos de referencia que estaban ubicados en los límites exteriores del modelo, para analizar si estos datos mejoraban los resultados obtenidos en los límites, que son donde se producen las mayores discrepancias. Dado el gran volumen de datos se experimentó en el método de Inversa a la Distancia un exponente de ponderación 3.

## 7.3. Experiencia con el muestreo C

En esta experiencia se utilizó el muestreo C, que tiene una cantidad de 380 datos, representando el 29% del muestreo B. El objetivo es evaluar la eficacia de los métodos de interpolación para generar óptimos MDT, cuando tienen muestreos menos densificados pero con datos de los rasgos morfológicos más importantes del relieve. Entonces se intentó determinar el método de interpolación apropiado para estos casos, debido a que “Un método imperfecto de muestreo no puede ser compensado mediante la implementación de un

sofisticado método de interpolación. [...] El mejor MDT es aquel que proporciona máxima definición del terreno con el mínimo de puntos" (Pallejá y Passini, 1984)

Con esta densidad de muestreo se pudo determinar cuales son los algoritmos de interpolación que pueden construir un MDT que represente las características del terreno con la mínima cantidad de datos.

En este caso se utilizaron los mismos métodos de interpolación que las experiencias anteriores, pero no se aplicaron todas las formas de búsqueda. Quedaron fuera los métodos de búsqueda normal, por los malos resultados en las experiencias anteriores y aquellos que usan un radio de búsqueda de 100 m, por ser un radio pequeño para un muestreo espaciado. Para el cálculo de interpolación de un nodo de la grilla, el programa podría no asignarle un valor cuando no encuentre la cantidad de datos necesarios en su entorno.

#### 7.4. EVALUACIÓN ESTADÍSTICA

Planteadas las diferentes densidades de muestreo y los métodos de interpolación que intervienen en este trabajo, a continuación se describe el proceso para su evaluación estadística.

Para proceder a una evaluación estadística global sobre la calidad de los modelos digitales obtenidos con cada método de interpolación, se trabajó con todos los nodos de las grillas generadas. El error global fue establecido entonces mediante una comparación de las grillas generadas con respecto al de referencia mediante el cálculo del Error Medio (EM), de las desviaciones entre aquellos y este último.

Sin embargo, el Error Medio puede entregar un valor distorsionado al anularse entre sí las diferencias negativas y positivas, por lo tanto, lo más habitual es utilizar el Error Cuadrático Medio (ECM), debido que anula los signos de las diferencias.

Los indicadores de EM y ECM, se calculan de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$EM = \frac{1}{n} \sum e_i \quad EMC = \sqrt{\frac{1}{n} \sum e_i^2}$$

donde,  $e_i = Z_{estimado} - Z_{real}$

Los otros cálculos estadísticos aplicados para evaluar las grillas generadas, fueron los siguientes:

VRMP: valor residual máximo positivo

VRMN: valor residual máximo negativo

N°R > 3ECM: número de residuales mayores que 3 veces al ECM

R > 3ECM: porcentaje del número de residuales mayor que 3 veces al ECM

De los parámetros mencionados, el EMC es el que mejor define la precisión de la combinación *adquisición de datos + método de interpolación*, para la construcción de las grillas; siguiendo en importancia el VRMP y VRMN (Pallejá y Passini, 1984).

Del cruce de las grillas generadas respecto a la referencia es importante conocer los llamados *grandes errores* en el MDT: “en ausencia de sesgos, los grandes errores se definen como aquellos cuya magnitud excede el triple del ECM” (Felicísimo, 1999).

Estos errores son de gran interés por mostrar las zonas que resultaron problemáticas para algunos algoritmos de interpolación, que por algún motivo no pudieron resolver.

Los resultados de las comparaciones con los muestreos A, B, C, con los cálculos estadísticos mencionados se encuentran en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3. En la Tabla 6 se observa los histogramas que representan el Error Medio Cuadrático (EMC), de todos los métodos de interpolación experimentados con la aplicación de los diferentes métodos de búsqueda.

Debido a la gran cantidad de grillas obtenidas, producto de diferentes parámetros aplicados con cada método de interpolación y diferentes densidades de muestreo, se produjo un total de 74 grillas, siendo un número suficiente de distintas posibilidades de generar modelos digitales para su evaluación.

Aplicar todos los cálculos estadísticos sobre todas estas grillas resultaría confuso e innecesario, por ello a partir de los valores obtenidos mediante el Error Medio Cuadrático (Tablas 5.1, 5.2 y 5.3), indicado por varios autores como el mejor parámetro para evaluar la calidad de los MDT, por lo tanto, fue apropiado para hacer una selección de los mejores casos obtenidos por cada método de interpolación con los distintos muestreos.

Donde las grillas seleccionadas fueron las correspondientes a los test: E28, E46, E48, E50, E51, E66 y E75.

Sobre estas grillas fueron analizadas sus discrepancias en forma más detallada, si bien el EMC es el mejor parámetro para definir en forma global la calidad de los MDT, fue necesario conocer el *origen* y la *localización* de los sectores de la malla generada donde tuvo las mayores diferencias y también identificar donde se produjeron las menores discrepancias.

La finalidad de este estudio fue determinar la causa del problema para aplicar la posible solución y en caso contrario conocer donde y que tipo de discrepancias se produjeron. Para determinar las debilidades cuando son usados en ciertas zonas problemáticas o las fortalezas de cada algoritmo de interpolación.

Para obtener los resultados de las diferentes discrepancias en cada nodo de la grilla, se dividieron por clases de error respecto a la grilla de referencia. Obteniendo además de valores numéricos reflejados en la Tabla 7, se realizó un gráfico de las grillas con la

localización de estas clases de error en las figuras 9.1 y 9.2, para visualizar el comportamiento de las grillas en todo su dominio.

## 8. REPRESENTACIONES GRÁFICAS

### 8.1. Imágenes Perspectivas

En la figura 10.1 se presentan las imágenes perspectivas del modelo digital del terreno, obtenido a partir de la grilla de referencia (kriging) utilizado en el cálculo estadístico.

Las imágenes de las figuras 10.2 a 10.9 corresponden a los mejores resultados obtenidos con cada método de interpolación. Si bien, algunos casos no estuvieron entre los más destacados de este trabajo, la finalidad fue observar las características de los modelos digitales generados por cada método. En ellos se pretendió visualizar si pudieron representar los rasgos morfológicos del terreno y con que grado de detalle lo realizaron, como las líneas estructurales, estas son: líneas de drenaje, divisorias de agua o los cambios bruscos de pendiente como los producidos por las barrancas.

Las imágenes mostraron distintas vistas del Cerro Chenque para analizar todos los sectores, donde se buscó la forma de resaltar los rasgos morfológicos del relieve.

Para observar los rasgos del terreno es fundamental en la presentación del MDT, la ubicación del punto de vista del observador, sobre el cual es necesario discernir tres cuestiones: la primera es definir en qué dirección se dirige la mirada (Norte, Sur, Este, Oeste, o alguna intermedia); la segunda cual es la distancia con que se visualizará el modelo; y la última corresponde a la altura sobre el plano base de relieve representado, donde se sitúa el observador.

La *dirección de observación* es importante, pues los distintos relieves pueden cubrir los sectores que se encuentran situados detrás y esto es lo que produce una representación realista del terreno. Además es necesario hallar la forma de generar una *especie de sombra* en los sectores más irregulares del modelo para ser destacados, de lo contrario, se observa una planicie que no es la real.

La *distancia desde donde se visualiza* afecta al tamaño del modelo y a los detalles del mismo, a mayor distancia del punto de vista, más reducida se ve la perspectiva.

Finalmente, la *altura del punto de vista* determina el grado de realce o planicie de la topografía. De acuerdo a la altura del modelo el punto de vista no tiene que ubicarse muy elevado, debido a que produce un modelo con un aspecto plano de su relieve y por el contrario, uno bajo puede suceder que las formaciones reduzcan el campo de visión, por eso es recomendable ubicar el punto de vista en una altura intermedia.

La combinación de estos parámetros permite generar perspectivas de forma diversas que muestran los distintos aspectos del modelo y tratando siempre de hallar la posición que pueda resaltar los detalles morfológicos del terreno.

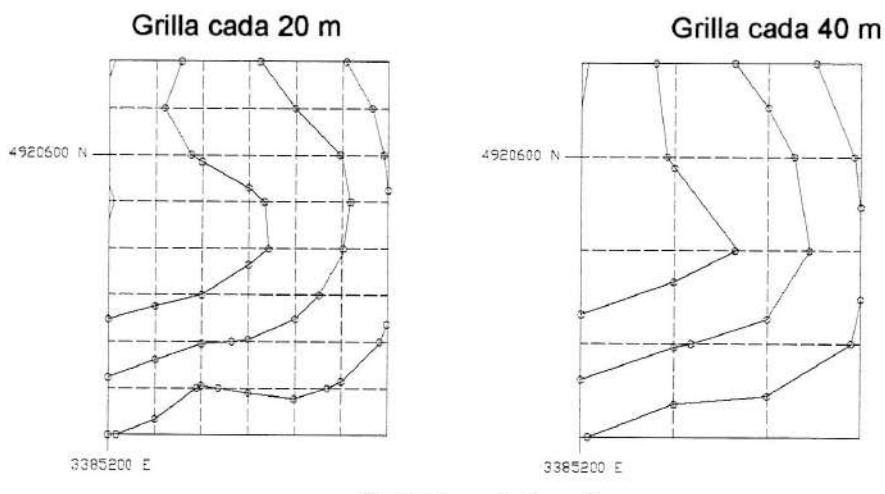
## 8.2. Curvas de nivel

Siendo la generación de las curvas de nivel la mejor representación altimétrica de los MDT y además permite visualizar los detalles topográficos del terreno, la calidad de los mismos debe ser analizada en dos aspectos: el primero corresponde a la precisión en la altura de las curvas de nivel; y el segundo, al grado de detalle con el que pueden representar los pequeños detalles y los finos rasgos morfológicos. Este último se refiere a las mencionadas líneas críticas del relieve que para el Cerro Chenque se encuentran definidas en el muestreo C de la figura 8.3.

La exigencia sobre la calidad de los mapas aparte del método de interpolación seleccionado, debe ser de acuerdo a la influencia de algunos factores en la construcción de las curvas de nivel, como son la densidad de datos y las dimensiones de la grilla.

Sobre el primero, en el caso en particular de este trabajo, a parte del método de interpolación usado, tendrá mayor exigencia el *muestreo B* que es más denso que A y C. Mientras que este último tiene una menor densidad de datos y seguramente no podrá representar los detalles topográficos con alta fidelidad, evaluando otros aspectos de acuerdo a sus características.

El otro punto referido a las dimensiones de la grilla definida por la cantidad de filas y columnas, es importante para la derivación automática de las curvas de nivel. Para su confección el programa usado en este trabajo utiliza la misma técnica para todos los métodos de interpolación luego de generar la grilla. La técnica consiste en realizar una interpolación lineal entre los nodos de la grilla, siempre sobre los límites de la celda, de esta forma determina primero los puntos por donde pasará la curva de nivel y luego mediante trazos rectos las líneas de nivel son graficadas de una celda a otra. Por eso, el espacio entre nodos de la grilla es otro factor a tener en cuenta, que permite la representación de los pequeños detalles. Para este trabajo se utilizó una grilla de 20 por 20 metros, a continuación veamos una comparación de otra de 40 por 40 metros:



En ambos casos se utilizó el método kriging y como se puede observar la grilla de 20 m permite graficar los rasgos morfológicos con mayor detalle. Por eso es conveniente cuando se tienen terrenos muy irregulares y si la densidad de datos lo permite, elaborar la grilla con la menor distancia entre nodos.

Para mejorar los trazos rectos que elabora el programa existen factores de suavización, la elección de este valor es un parámetro de gran importancia y en lo posible tiene que ser bajo, donde valores más altos pueden modificar fuertemente las líneas originales. Para este trabajo no se aplicó ningún factor suavizador sobre la derivación automática de curvas de nivel.

Sobre los MDT seleccionados para las imágenes perspectivas, se utilizaron las grillas generadas para derivar automáticamente las curvas de nivel correspondientes a cada uno. Para evaluar la fidelidad de estos mapas, los mismos fueron comparados con las curvas de nivel de la restitución, el proceso de comparación consistió en superponer ambas representaciones y las mismas se encuentran en las figuras 11.1 a 11.7.

Para visualizar la disposición del relieve se graficaron los perfiles topográficos, sobre los cuales se debe analizar además del ajuste al perfil de referencia obtenido de la restitución, el tipo de pendiente y si puede representar las líneas de drenaje, las cimas o fondos de depresión. Para ello se realizó un corte longitudinal del modelo para evaluar estos aspectos.

## 9. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De acuerdo al método desarrollado, una vez realizadas las experiencias con los diferentes métodos de interpolación, el análisis para evaluar la fidelidad de los mismos se divide en dos aspectos (Álcala Navarro, 1997):

- Diferencias de carácter estadístico
- Diferencias morfológicas

La primera comprendió al análisis de dos cuestiones, en primer lugar se realizó una comparación estadística global del MDT, empleando el índice del Error Medio Cuadrático (EMC), cuyos resultados se encuentran en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3. Donde se pudo definir que parámetros, como los diferentes métodos de búsqueda y asignación de pesos a los datos para el proceso de interpolación son los indicados de acuerdo al muestreo. Para ello se puede ver los histogramas de la Tabla 6, donde muestran el EMC obtenido con la aplicación de diferentes parámetros en cada método. Recordar que se trabajó con tres muestreos, donde dos (A, B) tienen un volumen de datos importante y (C) contiene una selección de los puntos característicos del relieve.

En un segundo análisis, sobre los resultados alcanzados en la comparación global, se realizó una selección de los mejores casos obtenidos con cada método de interpolación. Sobre estos se realizó un análisis estadístico más detallado para localizar las fortalezas y debilidades de cada uno. Con el análisis de todos los nodos que componen la grilla, tanto en forma gráfica (Figs. 9.1, 9.2) como numérica (Tabla 7), el objetivo era indicar donde se produjeron las diferentes clases de discrepancias, desde las mínimas hasta los grandes errores. Tratando de explicar en lo posible la causa que lo produjo y si existe una solución.

Las diferencias de carácter morfológicas, se establecieron mediante las representaciones gráficas, dado que sobre la imagen 3D (Figs. 10.1 a 10.8) fue difícil visualizar con claridad algunas características del relieve, se tuvo un mayor énfasis sobre su representación altimétrica, que son las curvas de nivel. Sobre ellas a través de la superposición con las líneas de nivel de referencia representadas en las Figs. 11.1 a 11.7, con el fin de observar la fidelidad con que las mismas pudieron graficar los aspectos topográficos del terreno, como las líneas críticas del relieve (divisorias de agua, cambios bruscos de pendiente y cursos de agua), además del grado de detalle para representar los pequeños rasgos morfológicos.

## Inversa a la Distancia

Sobre este método se realizaron distintas experiencias con diferentes exponentes de ponderación y formas de búsqueda para hallar los parámetros apropiados para una buena interpolación. Los resultados del EMC de las Tablas 5.1 a 5.3, indicaron que el parámetro más adecuado para generar un MDT, fue mediante el uso de:

**TEST E28      1 punto / cuadrante      peso=1**

correspondiente al muestreo B, donde esta forma de interpolación fue apropiada para los otros dos muestreos.

Si se observa la Tabla 6 indica que de todos los métodos de búsqueda, el uso de cuadrantes permitió una mejor distribución de los datos vecinos que intervinieron en el cálculo de la interpolación, aportando información en distintos sentidos al punto problema.

La búsqueda normal no pareció mejorar la interpolación sino todo lo contrario y para el uso de octantes es necesario un muestreo más denso, debido a que se corre el riesgo que el programa cuando intente cubrir los octantes pueda ingresar en el cálculo datos muy distantes o pueda tener inconvenientes en los límites del modelo que es la zona más problemática, donde los datos están distribuidos en un sector. Igualmente en estos casos el programa permite especificar la cantidad de sectores tanto en cuadrantes como en los octantes, que pueden estar vacíos al igual que la cantidad mínima de datos por sector para interpolar, de lo contrario cuando la cantidad de datos indicada es insuficiente, no le asigna valor a ese nodo.

La utilización de un exponente 2 y el uso de cuadrantes obtuvo buenos resultados con valores de EMC similares a los mencionados inicialmente, pero la interpolación con peso 2, 3 o superior parece ser apropiado cuando se tiene un muestreo muy denso. Otro tipo de muestreo menos densificado genera que uno o dos datos tengan mayor influencia en el cálculo y si ambos están ubicados en el mismo sector se puede generar un efecto similar al mencionado de cluster. Puede resultar eficiente este tipo de pesos cuando existe un gran volumen de datos en el entorno del punto a interpolar y en ese caso es necesario discriminar datos ya que tiene una cantidad suficiente para estimar su valor. Esto se puede observar en los test E40 y E41 con búsqueda normal que no ofrecieron los mejores resultados, pero dentro de este tipo de búsqueda el EMC es menor que un coeficiente de ponderación 1 como los test E26 y E27.

Tomando el test E28 a modo de ejemplo, por tener los parámetros con mejor adaptación al terreno, se puede observar en la Tabla 7 y figura 9.1, para realizar un análisis de las discrepancias producidas en todos los sectores de la grilla, las mayores diferencias se

producieron en las zonas menos densas del modelo, por lo tanto, Inversa a la Distancia no parece ser apropiado con este tipo de muestreos espaciados. Igualmente un 94,4 % de la grilla tuvo un error inferior a 5m, demostrando que pudo adaptarse a las diferentes irregularidades del terreno.

Finalmente se puede decir, que la densidad de muestreo define el valor para la asignación de pesos y el método de búsqueda. En el caso de tener un muestreo regularmente espaciado, un peso de valor 1 y el entorno del punto a interpolar mediante 1 dato por cuadrante es el más apropiado. Para muestreos con un volumen mayor de datos se puede utilizar un exponente de ponderación 2 o superior y el uso de cuadrantes u octantes, lo determina la distribución de datos en el entorno al punto a interpolar.

La derivación automática de curvas de nivel como muestra la figura 11.1, se adaptó a la utilizada como referencia, representando las características del relieve.

El trazado de las curvas de nivel a pesar de mostrar buenos resultados, presentó en sectores que deben ser continuos unas pequeñas variaciones, este efecto se produjo en los lugares del cerro que tienen un muestreo espaciado. La causa posiblemente se genera cuando se interpola un nodo y pasa al siguiente, pueden cambiar los datos del entorno que tienen mayor peso respecto de la operación anterior, produciendo esta mínima variabilidad y la pérdida de continuidad de las curvas de nivel. Sobre este caso en particular se intentó aplicar un factor suavizador para corregir la imperfección pero no mejoró la situación.

En los casos donde se tiene un gran volumen de datos, como la parte oeste del cerro que tiene la pendiente más fuerte (ver figura 8.3), el método demostró una alta fidelidad en trazado de las curvas de nivel. Esto indica que Inversa a la Distancia, necesita muestreos muy densos para obtener modelos de calidad.

La imagen 3D tomó estas pequeñas imperfecciones pero igualmente el modelo digital generado se asemejó a la realidad (figura 10.2).

### Triangulación con interpolación lineal

Las tres distintas densidades de muestreo experimentadas en este método, permitieron identificar sectores donde el método realizó la interpolación adecuadamente y en otros casos presentó algunos inconvenientes que dificultan el proceso de la triangulación, pero son errores que en algunos casos pueden evitarse.

En el muestreo A quedó en evidencia la zona problemática de los TIN, en los límites del modelo debido que no pueden extrapolar y en algunos casos cuando se genera la malla triangular, los sectores del modelo que no cubre, no le asigna valores a esos nodos de la grilla en particular. Esto produce regiones planas sobre la grilla y no permite el trazado de

curvas de nivel, observando la Tabla 5.1 indica que con el muestreo A (test E15) se generaron 83 nodos sin valores (Nº NB). Pero este problema fue solucionado en el muestreo B que contiene datos fuera de los límites del modelo y permitió extender la triangulación sobre todo el dominio del área evitando el inconveniente de la asignación de nodos sin valor.

De esta forma se obtuvo uno de los mejores resultados entre todos los métodos de interpolación, con el test E46, donde tiene un EMC=1,93 y con un 96% de los vértices de la grilla con un error inferior a 5m. El método presentó algunos inconvenientes para triangular en la parte sudoeste del modelo, siendo la zona menos densa y donde por la mala distribución de datos, no estaban las condiciones apropiadas para una buena triangulación.

En el centro del modelo donde sufre una depresión producto de los dos picos del cerro, se generó un plano llano por consecuencia que es una zona con datos de valores altimétricos iguales, pertenecientes a la curva de nivel de 120 m y seguramente con la incorporación de puntos acotados se podría haber evitado este inconveniente, el mismo efecto ocurrió en las cimas del cerro.

Con el muestreo C se lograron muy buenos resultados con un aceptable EMC=3,45. En el test E66 como muestra la figura 9.2 se repitieron los mismos inconvenientes mencionados anteriormente, en los sectores con una mala distribución de datos y la falta de puntos acotados. Esto indica que el método puede ser usado con muestreos menos densos, pero con la condición de mantener siempre una regularidad espacial.

Por los buenos resultados obtenidos, este algoritmo de interpolación es apto para la generación de MDT de precisión, mejorando su fidelidad cuando se tiene un mayor muestreo, pero debe estar regularmente espaciado para una correcta triangulación, logrando adaptarse a los pequeños rasgos morfológicos y a las líneas críticas del relieve.

También ha mostrado ser buen interpolador con muestreos espaciados y donde es conveniente incorporar puntos acotados, para evitar que se generen sectores planos en los fondos de depresión o en las cimas.

Las curvas de nivel generadas con este método mostraron alta fidelidad. Al utilizar en la interpolación los puntos de referencia como vértices de la triangulación, permitió representar los finos rasgos morfológicos. Como el sector H indicado en la figura 11.2 que la mayoría de los métodos suavizaron y en este caso es similar a la restitución de la figura 1.

En estos casos el método adquiere mayor precisión cuando se tiene un volumen de datos importante con una regularidad espacial apto para triangular y evitar la selección de vértices en el proceso de triangulación.

Sobre la imagen 3D de la figura 10.3, si bien es difícil visualizar los mismos detalles que las curvas de nivel, mostró bien marcados los rasgos morfológicos, como las líneas

críticas del relieve y los cambios bruscos de pendiente, no los suavizó como el modelo de kriging.

Un aspecto a tener en cuenta para mejorar el rendimiento de este método, es la inclusión de puntos acotados, para evitar que se produzcan zonas de aterrazamiento como muestra la imagen 3D (figura 10.3) en las cimas del cerro.

Las representaciones gráficas generadas con un volumen menor de datos como el muestreo C, las curvas de nivel tuvieron una forma más suavizada (figura 11.6), en cambio, la imagen 3D de la figura 10.7 no se apreciaron diferencias con la primera, conservando las mismas propiedades.

### **Vecino Próximo**

Si bien en el desarrollo teórico del método se indicó los pocos recursos del mismo, debido a la utilización de los polígonos de Thiessen para interpolar, los malos resultados obtenidos tanto en el EMC como en otros análisis, afirmaron que no es apto para la generación de MDT de precisión.

Si se observa el test E48 los valores obtenidos en la Tabla 7 y figura 9.1, tuvieron discrepancias en todos los sectores, pero se aprecia que las menores diferencias se produjeron en las zonas del modelo con pendientes más suaves y datos espaciados, que permitieron una mejor construcción de los polígonos de Thiessen, mostrando una tendencia sobre que tipo de variables eran necesarias para que el método trabaje correctamente.

Este tipo de método puede ser aplicado con el objeto de resaltar los valores altimétricos de una serie de datos llanamente espaciados, donde no se debe esperar precisión.

La imagen 3D obtenida presenta un aspecto escalonado, producto de la construcción de los polígonos de Thiessen, que además tienen una forma plana al tomar el valor altimétrico del dato que lo contiene. El MDT obtenido se aleja de la realidad y donde la derivación automática de las curvas de nivel son muy difíciles de interpretar a simple vista.

### **Mínima Curvatura**

Los resultados del EMC muestran que es un óptimo interpolador desde el punto de vista estadístico, donde se destaca que tuvo un ligero menor EMC en el muestreo A que B. Con respecto a C, no parece el método ser apropiado para muestreos espaciados, indicando que necesita un gran volumen de datos para obtener modelos de calidad.

Para conocer el tipo de discrepancias del modelo y en los sectores donde los mismos se produjeron, la Tabla 6 indica que un 89,93% de la grilla tuvo un error inferior a 5 m,

producido los grandes errores en los límites del modelo (figura 9.1), lo que generó que el EMC no sea menor.

La construcción de curvas de nivel (figura 11.4) muestran una apropiada representación de la altimetría del terreno, adaptándose a las zonas más altas del cerro, al igual que el fondo de depresión entre los dos picos del Chenque, donde varios métodos de interpolación no pudieron representar esta zona correctamente. El único aspecto desfavorable, ocurre con el trazo de las curvas de nivel que produjeron un efecto de variabilidad similar al método de Inversa a la Distancia. En este caso fue más potenciado y ocurrió en todo el dominio del modelo, como el caso de Inversa a la Distancia se aplicó un factor suavizador bajo para no modificar demasiado la superficie, pero no corrigió las imperfecciones.

El método ha demostrado ser eficiente en forma estadística, pero cartográficamente la derivación automática de las curvas de nivel pueden ser cuestionadas.

### Funciones de Base Radial

Este método con la utilización de la función multicuadrática, obtuvo la mayor fidelidad de todos los interpoladores experimentados en este trabajo, alcanzando resultados similares a kriging.

Por los valores del EMC en la Tabla 7, el método demostró ser un excelente interpolador con las tres densidades de muestreo usadas, obteniendo discrepancias mínimas con la grilla de referencia.

Los parámetros para definir el entorno del punto a interpolar no influyeron en el resultado final, si bien el método de búsqueda normal (test E51) se destaca como el mejor, el uso de cuadrantes u octantes obtuvo resultados similares, como indica el EMC en la Tabla 6.

En la Tabla 7 el test E51 se puede observar con 99,59% de la grilla tuvo un error inferior a 5 m y solamente un pequeño porcentaje tuvo un error superior en la zona que posee una mala distribución, siendo un sector aceptable que pueda producir este tipo de errores, donde todos los métodos de interpolación presentaron inconvenientes.

Sobre la experiencia con el muestreo C, el test E70 muestra un EMC=2,98, obteniendo una calidad superior a otros interpoladores que usaron una mayor densidad de muestreo. Aunque tiene un 91,2% de la grilla con error inferior a los 5 m, presentó lógicamente algunos grandes errores, producidos en las mismas zonas problemáticas repetidos en otros métodos como se ve en la figura 9.2.

Para las experiencias realizadas con este método de interpolación no se usó el factor suavizador, donde se buscó la forma de obtener un MDT de alta calidad y estos factores suelen restar precisión. Dado que no hay ningún método aceptado universalmente para producir este factor suavizador y lo debe experimentar el usuario, su aplicación es similar a la mayoría de los interpoladores, donde un valor elevado produce una superficie muy suavizada y podría generar un modelo diferente al real (Aguilar M.A., Aguilar F. J., Carvajal y Agüera, 2001)

Este método demostró generar modelos digitales que se adaptan fielmente a la topografía del terreno, tanto en zonas altas como a las más bajas del relieve, produciendo resultados muy similares a kriging y donde tiene la ventaja sobre este último, que necesita menos parámetros para su aplicación. Simplemente la elección de una función, siendo recomendada la multicuadrática sobre la cual no hay que definir constantes como kriging y no requiere un estudio previo. Los métodos de búsqueda no presentaron diferencias como suele ocurrir en otros métodos y queda la elección del usuario en adoptar un factor suavizador o ignorarlo donde esta última opción produjo excelentes resultados.

El modelo digital producido tiene un alta calidad, donde a través de las curvas de nivel (figura 11.5) logró adaptarse a los rasgos morfológicos del terreno. El método tiene la particularidad que en todos los aspecto de la topografía obtuvo los mismos resultados que kriging.

El modelo 3D de la figura 10.6 se asemejó a la realidad resaltando las características del relieve, pero al igual que kriging, tendió a suavizar las líneas estructurales como cambios bruscos de pendiente, etc.

Las experiencias realizadas con el muestreo C, arrojaron resultados satisfactorios como muestran las líneas de nivel (figura 11.7), indicando que este método es un buen interpolador con muestreos menos densos.

## 10. CONCLUSIONES FINALES

La utilización de modelos digitales del terreno para fines cartográficos ofrece alta confiabilidad.

Los estudios realizados en este trabajo demuestran que la combinación *adquisición de datos + métodos de interpolación* obtienen buenos resultados para la construcción de MDT, con la condición de saber seleccionar el método y los parámetros apropiados, de acuerdo al tipo de muestreo y los requerimientos de salida.

Los datos deben estar regularmente espaciados, densificados en mayor grado en las líneas críticas del relieve para forzar el método y asegurar una correcta interpolación. Es recomendable la inclusión de puntos acotados para evitar efectos de aterrazamiento en los fondos de depresión o en las cimas.

Las curvas de nivel presentan una óptima precisión en su altimetría y se adaptan a los finos rasgos morfológicos del terreno, su fidelidad aumenta cuando la densidad del muestreo es mayor y se adaptan a las líneas críticas del relieve.

Las imágenes 3D ofrecen una adecuada visualización global del modelo que se asemeja a la realidad.

Los mejores métodos de interpolación para el tipo de muestreos y relieves como el Cerro Chenque presentados en este trabajo son: Kriging, Funciones de Base Radial e Interpolación con Triangulación Lineal.

De los tres algoritmos mencionados se destaca como el mejor el método de Base Radial con la función multicuadrática que obtiene resultados similares a Kriging, pero su ventaja sobre este último es la facilidad para su aplicación y no requiere un estudio previo.

El método de Funciones de Base Radial tiene la opción de seleccionar un factor suavizador, donde no existe una regla universal para su determinación y por lo tanto, lo debe experimentar el usuario. Igualmente ignorando este factor se obtienen excelentes resultados y nos aseguramos de no crear superficies suavizadas que difieren con la realidad. El método de búsqueda normal ofrece los mejores resultados pero no presenta diferencias considerables con el resto.

Kriging es un excelente interpolador pero cuando estamos seguros de usar el variograma correcto, siendo difícil hallar los parámetros apropiados para su aplicación y crea cierta incertidumbre si se está usando la función correcta que represente la variación altimétrica entre datos en todo el dominio del área .

Un rango ligeramente inferior a los dos métodos mencionados, es la Interpolación con Triangulación Lineal que brinda alta fidelidad y del cual se destacan los siguientes aspectos:

- No presupone ni exige la continuidad estadística de la superficie a representar, ofreciendo mayor seguridad sobre los valores altimétricos del MDT.
- Representar las líneas críticas del relieve (cursos de agua, barrancas, etc.) con los puntos reales usados como vértices de la triangulación.
- Construir fielmente los cambios bruscos de pendiente y no suavizar como realizan Kriging y Funciones de Base Radial.

Es recomendable para potenciar su rendimiento un muestro regularmente espaciado apto para la triangulación, con la densificación de las líneas críticas del relieve y la inserción de puntos acotados.

Los tres métodos de interpolación cuando trabajan con densidades de muestras bajas, generan superficies suavizadas pero por el tipo de entrada los resultados son satisfactorios. Para estos casos es fundamental que el muestreo contenga las líneas y puntos críticos del relieve.

El método de inversa a la distancia se adapta a la superficie del terreno cuando tiene una gran volumen de datos para interpolar.

Para los muestreos utilizados en este trabajo los parámetros más apropiados son:

- método de búsqueda: 1 punto por cuadrante
- exponente de ponderación: 1

El uso de cuadrantes permite una mejor distribución en el entorno del punto a interpolar y en el caso de tener un gran volumen de datos del muestreo, sería conveniente utilizar un coeficiente de ponderación 2 o superior.

El método de Vecino más Próximo no es apto para generar modelos digitales del terreno de precisión, se debe pensar en él, para casos de muestreos espaciados sobre grandes extensiones de terreno, donde no existe mucha variabilidad altimétrica entre datos y el objetivo es resaltar esa mínima variación para una mayor interpretación.

Por ser apropiado para el estudio de terrenos extensos, puede ser usado para casos donde se toman muestras espaciadas que aportan información sobre cierta área de influencia, como el caso de la utilización de pluviómetros para el cálculo de láminas de agua precipitada en el estudio de los suelos.

Los modelos 3D presentan un aspecto escalonado producto de la construcción de los polígonos de Thiessen, que permiten destacar la altimetría de diferentes zonas. El comportamiento de las curvas de nivel es difícil de interpretar a simple vista y puede crear confusión.

El método de Mínima Curvatura demuestra óptimos resultados en el sentido estadístico, adaptándose tanto en las cimas como depresiones del cerro, pero presenta inconvenientes en los límites del modelo. En la visualización del modelo, el comportamiento de las curvas de nivel muestran unas ligeras variaciones en el trazo, que pueden llegar a no ser deseables cartográficamente y donde la aplicación de factores de suavización no mejora la representación.

El método se ajusta al terreno solamente al utilizar un gran volumen de datos para interpolar, no siendo apto para muestreos espaciados.

El método de Superficie de Tendencia genera una función sobre todo el dominio del modelo, que no permite representar las irregularidades del terreno para casos como el Cerro Chenque, proporcionando una descripción sintética del terreno. Para aplicar este tipo de funciones es necesario usar una cantidad mínima de datos, donde las coordenadas planimétricas deben ser valores chicos, de lo contrario es necesario cambiar el sistema de referencia, debido que estos factores pueden afectar el cálculo de las funciones produciendo modelos muy diferentes al real.

## BIBLIOGRAFÍA

AGUILAR, M. A., AGUILAR, J. F., CARVAJAL, F., AGUERA, F., 2001: *Evaluación de las diferentes técnicas de interpolación espacial para la generación de modelos digitales del terreno agrícola*, Universidad de Almería, Dpto. de Ingeniería Rural, 16p.

[http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id\\_articulo=22](http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id_articulo=22)

ALCALÁ NAVARRO, J., 1997: *TIN vs. IDW: análisis de la diferencias entre los modelos digitales de elevaciones*, Universidad Autónoma de Barcelona, Trabajo del curso sobre Modelos Digitales de Elevaciones, 6p. <http://www.estimo.uniovi.es/~feli/Invitados/alcala/texto.html>

ANCAROLA, M. y CANDIA, J., 2000: *Modelos digitales de elevaciones*, X Congreso Nacional de Cartografía, I.G.M. y Centro Argentino de Cartografía, 26 al 30 de Junio de 2000, Ciudad de Buenos Aires, Argentina, p 309–313.

BOSQUE SENDRA, J., 1992: *Sistemas de información geográfica*, Ediciones Rial, Madrid, 445 p.

BURROUGH, P.A., 1986: *Principles of Geographical Information System for Land Resources Assessment*, Monographs on soil and resources survey, New York, Reprinted (twice), 1993, p 39–56, p 147–165.

CARIS, 2003: *Caris Gis User's guide*, (CD), software CARIS GIS V4.4a, Canada.

CARVACHO BART, L. y SÁNCHEZ MARTÍNEZ, M., 1997: *Modelos digitales del terreno, comparación entre el modelo TIN y el INTERCON*, Universidad de Alcalá de Henares, Trabajo de curso de Doctorado sobre Modelos Digitales del Terreno, 6p.  
<http://www.estimo.uniovi.es/~feli/Invitados/carvacho/texto.html>

CHRISTENSEN, A.H.J., 1989: *La Conversión de Curvas de Nivel en Modelos Digitales de Terreno*, Revista Cartográfica, IPGH. Number 56, 1989, p 133–165. Un sumario puede encontrarse entre los informes de la Conferencia Latino American sobre Sistemas de Información Geográficos, GIS, Mérida, Venezuela, 1989.

CHRISTENSEN, A.H.J., 2002: *From Contours to Terrain Models*. Proceedings (CD) of ACSM/ASPRS Conference, 19 al 26 de 2002, Washington D.C.

DELGADO GARCÍA J., CARDENAL ESCARCEÑA F. J., GÓMEZ MOLINA A., 2002: *Generación de modelos digitales de terreno mediante la aplicación de métodos de estimación estocásticos*, XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica, 5 al 7 junio de 2002, Santander, España, 10p. <http://departamentos.unican.es/digteg/ingegraf/cd/ponencias/139.pdf>

FELICÍSIMO, A.M., 1999: *La utilización de los MDT en los estudios del medio físico*, 127p. <http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/>

FELICÍSIMO, A. M.1994: *Paramétric statistical meted for error detection in digital elevation models*, ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, 1994. <http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/SIG/ICA95.html>

GIRARDI, D., 1990: *Estudio de los métodos de interpolación usados en la generación de los modelos digitales de elevaciones*, I.G.M., Sección Análisis de Procesos, 15p.

Golden Software Inc, 1997: User's Guide *Surfer 6*, USA.

HAURI, B. A., GASPARI, F. J. y BRUNO J. E., 2003: *Elaboración de un DEM de la cuenca de Río Quinto*, Primer Congreso de la Ciencia Cartográfica, Centro Argentino de Cartografía, 25 al 27 de Junio de 2003, Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

MARTÍNEZ MARÍN, R. y GONZÁLEZ GÁMEZ, F., 2001: *Análisis de las metodologías habituales para la generación de modelos digitales del terreno*, 10p. [http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id\\_articulo=71](http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id_articulo=71)

MARTÍNEZ MARÍN, R., 2000: *Generación automática de una malla triangular*, 10p. [http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id\\_articulo=129](http://www.mappinginteractivo.com/plantilla-ante.asp?id_articulo=129)

MORILLO BARRAGÁN J., POZO BASELGA J., PÉREZ PRECIADO F., RODRÍGUEZ GORDILLO M., REBOLLO CASTILLO F., 2002: *Ánalisis de la calidad de un modelo digital de elevaciones generado con distintas técnicas de interpolación*, XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica Gráfica, 5 al 7 junio de 2002, Santander, España,12p. <http://departamentos.unican.es/digteg/ingegraf/cd/ponencias/11.pdf>

MURRAY R. SPIEGEL, 1991: *Estadística*, Serie Schaum, Editorial Mc Graw-Hill.

PALLEJÁ, E., PASSINI, R.M., 1984: *Estudio sobre muestreo, interpolación, precisión y aplicaciones de modelos digitales del terreno*, 58p.

ROSSITER, D.G., RODRÍGUEZ, M.F., 1994: *Construcción de modelos digitales del terreno para la evaluación de tierras*, 36p. <http://www.redpav-fpolar.info.ve/venesuel/v021a070.html>

SERVICIO DE HIDROGRAFÍA NAVAL, 2001: *Carta náutica H-357B*, Puerto Comodoro Rivadavia, escala 1:5.000, 1ra. Edición 2001.

UGRIN, H., 1990: *Estudio sobre la fidelidad de los modelos digitales del terreno*, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan, Depto. de Ingeniería en Agrimensura, 26p.

UNIVERSAL SYSTEMS LTD. (CARIS), 1994: *Cartographic mapping, DTM User's Guide*, volume 2, software CARIS GIS version 4.2.5, Canada, 1994.

**ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LAS DISCREPANCIAS  
ENTRE DIFERENTES MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN**

TEST	CONVERSIÓN DE DATOS (Muestreo irregular A)						DISCREPANCIAS (grilla generada - grilla de referencia)								
	Método de Interpolación	EP	Método búsqueda	Radio (m)	Datos por sector	NºPR	EM (m)	ECM (m)	VRMP (m)	VRMN (m)	NºRP	NºRC	NºRN	NºNB	NºR>3
E01	Inversa a la Distancia	1	todos	200	12	1020	10,75	43,22	83,37	-84,30	1687	2	1222	0	0,00
E02	Inversa a la Distancia	1	normal	200	12	1020	2,62	6,99	25,49	-23,48	1785	2	1124	27	0,93
E03	Inversa a la Distancia	1	normal	100	8	1020	1,50	6,27	20,20	-66,71	1739	2	1148	22	1,00
E04	Inversa a la Distancia	1	cuadrante	800	1	1020	0,77	2,97	14,36	-18,59	1723	2	1186	42	1,44
E05	Inversa a la Distancia	1	cuadrante	800	2	1020	0,99	3,55	17,85	-18,59	1749	2	1160	39	1,34
E06	Inversa a la Distancia	1	octante	800	1	1020	1,01	3,53	14,89	-18,59	1751	2	1158	28	0,96
E07	Inversa a la Distancia	1	octante	800	2	1020	1,47	5,03	18,14	-20,25	1772	2	1137	23	0,79
E08	Inversa a la Distancia	2	todos	-----	-----	1020	7,68	22,43	66,44	-48,63	1756	3	1152	0	0,00
E09	Inversa a la Distancia	2	normal	200	12	1020	1,84	5,37	23,25	-21,87	1752	3	1156	58	1,99
E10	Inversa a la Distancia	2	normal	100	8	1020	1,06	5,45	18,51	-66,71	1680	3	1206	22	40
E11	Inversa a la Distancia	2	cuadrante	800	1	1020	0,80	3,12	14,36	-18,59	1616	2	1293	48	1,65
E12	Inversa a la Distancia	2	cuadrante	800	2	1020	0,95	3,38	17,08	-18,59	1690	2	1219	47	1,61
E13	Inversa a la Distancia	2	octante	800	1	1020	0,94	3,31	15,21	-18,59	1664	2	1245	42	1,44
E14	Inversa a la Distancia	2	octante	800	2	1020	1,27	4,13	17,53	-19,57	1720	3	1188	39	1,34
E15	Interpolación Lineal	-----	-----	-----	-----	1020	-0,91	9,60	9,78	-134,63	1551	4	1273	83	42
E16	Vecino Próximo	-----	-----	800	-----	1020	0,82	5,80	25,48	-22,09	1542	2	1367	10	0,34
E17	Vecino Próximo	-----	-----	200	-----	1020	0,82	5,80	25,48	-22,09	1542	2	1367	10	0,34
E18	Vecino Próximo	-----	-----	100	-----	1020	0,55	6,53	25,48	-66,71	1528	2	1359	22	0,89
E19	Minima Curvatura	-----	-----	-----	-----	1020	-0,73	3,61	15,91	-36,50	1211	2	1698	49	1,68
E20	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	normal	200	12	1020	0,10	1,11	8,61	-12,86	1432	4	1475	62	2,13
E21	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	cuadrante	800	1	1020	0,67	2,45	14,36	-18,59	1708	2	1201	69	2,37
E22	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	cuadrante	800	2	1020	0,58	2,18	13,87	-18,59	1708	6	1197	81	2,78
E23	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	octante	800	1	1020	0,58	2,20	13,70	-18,59	1689	4	1218	92	3,16
E24	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	octante	800	2	1020	0,31	1,45	8,89	-18,56	1668	12	1231	86	2,95

Tabla 5.1

- EP : exponente de ponderación
- NºPR : número de puntos de referencia
- VRMP : valor residual máximo positivo
- VRMN : valor residual máximo negativo
- NºRP : nº de residuales positivos
- NºRC : nº de residuales iguales a
- NºRN : nº de residuales negativos
- NºNB : nº de nodos en blanco
- NºR>3 : nº de residuales mayores 3 veces al EMC
- % NºR>3 : % de residuales mayores 3 veces al EMC

TEST	CONVERSIÓN DE DATOS (Muestreo irregular B)						DISCREPANCIAS (grilla generada - grilla de referencia)								
	Método de Interpolación	EP	Método búsqueda	Radio (m)	Datos por sector	NºPR	EM (m)	ECM (m)	VRMP (m)	VRMN (m)	NºRP	NºRC	NºRN	NºNB	NºR>3
E25	Inversa a la Distancia	1	todos	-----	-----	1314	3,96	42,32	77,13	-91,61	1542	2	1367	0	0,00
E26	Inversa a la Distancia	1	normal	200	12	1314	1,90	5,90	22,47	-13,14	1713	2	1196	41	1,41
E27	Inversa a la Distancia	1	normal	100	8	1314	1,16	5,35	18,68	-33,32	1682	2	1209	18	1,20
E28	Inversa a la Distancia	1	cuadrante	800	1	1314	0,57	2,46	9,78	-9,07	1672	2	1237	47	1,61
E29	Inversa a la Distancia	1	cuadrante	800	2	1314	0,71	2,97	12,03	-8,73	1694	2	1215	14	0,48
E30	Inversa a la Distancia	1	octante	800	1	1314	0,62	2,81	13,17	-7,34	1682	2	1217	16	0,55
E31	Inversa a la Distancia	1	octante	800	2	1314	0,88	4,10	15,57	-12,89	1707	2	1202	9	0,31
E32	Inversa a la Distancia	2	todos	-----	-----	1314	5,11	21,31	60,89	-51,88	1672	2	1237	0	0,00
E33	Inversa a la Distancia	2	normal	200	12	1314	1,32	4,46	19,07	-9,77	1670	2	1239	55	1,89
E34	Inversa a la Distancia	2	normal	100	8	1314	0,80	4,57	16,49	-33,32	1615	3	1275	18	1,31
E35	Inversa a la Distancia	2	cuadrante	800	1	1314	0,80	2,57	11,07	-6,67	1583	2	1346	37	1,27
E36	Inversa a la Distancia	2	cuadrante	800	2	1314	0,69	2,78	11,74	-8,26	1627	2	1282	30	1,03
E37	Inversa a la Distancia	2	octante	800	1	1314	0,67	2,68	10,38	-6,92	1592	3	1316	31	1,06
E38	Inversa a la Distancia	2	octante	800	2	1314	0,89	3,37	14,45	-9,26	1657	2	1252	18	0,62
E39	Inversa a la Distancia	3	todos	-----	-----	1314	2,94	9,60	44,41	-19,36	1646	2	1263	107	3,88
E40	Inversa a la Distancia	3	normal	200	12	1314	0,97	3,98	16,85	-9,26	1565	2	1344	50	1,72
E41	Inversa a la Distancia	3	normal	100	8	1314	0,59	4,44	15,04	-33,32	1527	2	1364	18	3,2
E42	Inversa a la Distancia	3	cuadrante	800	1	1314	0,62	3,13	13,08	-8,09	1535	2	1374	11	0,38
E43	Inversa a la Distancia	3	cuadrante	800	2	1314	0,66	3,16	11,42	-9,13	1538	2	1371	13	0,45
E44	Inversa a la Distancia	3	octante	800	1	1314	0,66	3,12	11,09	-8,32	1538	2	1371	15	0,52
E45	Inversa a la Distancia	3	octante	800	2	1314	0,78	3,40	13,91	-8,81	1570	2	1339	23	0,79
E46	Interpolación Lineal	-----	-----	-----	-----	1314	0,53	1,92	9,78	-9,40	1656	4	1251	85	2,92
E47	Vecino Próximo	-----	-----	-----	-----	1314	0,66	5,62	25,48	-22,09	1504	2	1405	7	0,24
E48	Vecino Próximo	-----	-----	200	-----	1314	0,66	5,62	25,48	-22,09	1504	2	1405	7	0,24
E49	Minima Curvatura	-----	-----	100	-----	1314	0,45	6,07	25,48	-33,32	1492	2	1399	18	0,82
E50	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	-----	200	-----	1314	0,75	3,71	15,46	-35,16	1200	3	1708	52	1,79
E51	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	normal	200	12	1314	0,08	0,86	8,61	-3,90	1431	4	1476	60	2,06
E52	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	cuadrante	800	1	1314	0,54	1,88	9,78	-4,54	1677	2	1232	85	2,92
E53	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	cuadrante	800	2	1314	0,47	1,64	8,90	-4,19	1676	7	1228	98	3,37
E54	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	octante	800	1	1314	0,46	1,63	9,78	-3,94	1678	4	1229	98	3,37
E55	F.B. Radial (multicuadrática)	-----	octante	800	2	1314	0,26	1,05	8,45	-3,18	1672	11	1228	85	2,92

Tabla 5.2

TEST	CONVERSIÓN DE DATOS (Muestreo irregular C)							DISCREPANCIAS (grilla generada - grilla de referencia)							
	Método de Interpolación	EP	Método búsqueda	Radio (m)	Datos por sector	NºPR	EM (m)	ECM (m)	VRMP (m)	VRMN (m)	NºRP	NºRC	NºRN	NºNB	NºR>3
E56	Inversa a la Distancia	1	normal	200	12	380	4,70	11,62	37,54	-27,93	1802	1103	5	1	0,03
E57	Inversa a la Distancia	1	cuadrante	800	1	380	1,18	4,91	24,22	-22,61	1634	1242		35	1,20
E58	Inversa a la Distancia	1	cuadrante	800	2	380	1,94	6,35	26,33	-22,66	1707	1184		20	0,69
E59	Inversa a la Distancia	1	octante	800	1	380	1,71	6,25	22,51	-20,35	1710	1187		14	0,48
E60	Inversa a la Distancia	1	octante	800	2	380	2,75	9,26	26,27	-26,36	1778	1133		0	0,00
E61	Inversa a la Distancia	2	normal	200	12	380	3,27	8,55	29,96	-27,93	1789	1108	5	8	0,27
E62	Inversa a la Distancia	2	cuadrante	800	1	380	1,18	4,99	24,03	-22,87	1632	1242		37	1,27
E63	Inversa a la Distancia	2	cuadrante	800	2	380	1,77	5,65	24,93	-23,37	1698	1189		24	0,82
E64	Inversa a la Distancia	2	octante	800	1	380	1,63	5,37	23,49	-21,92	1686	1195		30	1,03
E65	Inversa a la Distancia	2	octante	800	2	380	2,43	7,07	25,83	-22,60	1755	1140		16	0,55
E66	Interpolación Lineal	---	---	---	---	380	0,35	3,45	27,84	-21,97	1509	2	1362	38	1,31
E67	Vecino Próximo	---	---	800	---	380	0,99	9,53	50,56	-49,22	1493	2	1383	33	1,13
E68	Vecino Próximo	---	---	200	---	380	0,99	9,53	50,56	-49,22	1493	2	1383	33	1,13
E69	Mínima Curvatura	---	---	---	---	380	-0,89	5,64	20,01	-33,92	1308	1525	78	2,68	
E70	F.B. Radial (multicuadrática)	---	normal	200	12	380	0,31	2,98	19,63	-23,82	1606	1264	41	1,41	
E71	F.B. Radial (multicuadrática)	---	cuadrante	800	1	380	0,83	3,78	25,01	-22,65	1632	3	1236	40	1,37
E72	F.B. Radial (multicuadrática)	---	cuadrante	800	2	380	0,65	3,33	21,35	-23,60	1636	1232	43	1,48	
E73	F.B. Radial (multicuadrática)	---	octante	800	1	380	0,68	3,34	22,30	-24,10	1665	1	1208	37	1,27
E74	F.B. Radial (multicuadrática)	---	octante	800	2	380	0,45	2,98	20,05	-23,81	1649	2	1217	43	1,48

Tabla 5.3

**PRESICIONES DE LOS MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN  
CON APLICACIÓN DE DIFERENTES MÉTODOS DE BÚSQUEDA**

MÉTODO	TEST	BÚSQUEDA	RADIO	PUNTOS	ERROR MEDIO CUADRÁTICO (EMC)											
					0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Metros
<b>MUESTREO - A</b>	Inversa a la Distancia (1)	E01	Todos	-----	1020											
		E02	Normal	200	12											
		E03	Normal	100	8											
		E04	Cuadrante	800	1											
		E05	Cuadrante	800	2											
		E06	Octante	800	1											
		E07	Octante	800	2											
	Inversa a la Distancia (2)	E08	Todos	-----	1020											
		E09	Normal	200	12											
		E10	Normal	100	8											
		E11	Cuadrante	800	1											
		E12	Cuadrante	800	2											
		E13	Octante	800	1											
		E14	Octante	800	2											
<b>MUESTREO - B</b>	Interpolación Lineal	E15	-----	-----	-----											
	Vecino más Próximo	E16	-----	800	-----											
		E17	-----	200	-----											
		E18	-----	100	-----											
	Mínima Curvatura	E19	-----	-----	-----											
		E20	Normal	200	12											
		E21	Cuadrante	800	1											
	F. Base Radial (Multicuadrática)	E22	Cuadrante	800	2											
		E23	Octante	800	1											
		E24	Octante	800	2											
<b>MUESTREO - C</b>	Inversa a la Distancia (1)	E25	Todos	-----	1314											
		E26	Normal	200	12											
		E27	Normal	100	8											
		E28	Cuadrante	800	1											
		E29	Cuadrante	800	2											
		E30	Octante	800	1											
		E31	Octante	800	2											
	Inversa a la Distancia (2)	E32	Todos	-----	1314											
		E33	Normal	200	12											
		E34	Normal	100	8											
		E35	Cuadrante	800	1											
		E36	Cuadrante	800	2											
		E37	Octante	800	1											
		E38	Octante	800	2											
<b>MUESTREO - C</b>	Inversa a la Distancia (3)	E39	Todos	-----	1314											
		E40	Normal	200	12											
		E41	Normal	100	8											
		E42	Cuadrante	800	1											
		E43	Cuadrante	800	2											
		E44	Octante	800	1											
		E45	Octante	800	2											
	Interpolación Lineal	E46	-----	-----	-----											
	Vecino más Próximo	E47	-----	800	-----											
		E48	-----	200	-----											
		E49	-----	100	-----											
	Mínima Curvatura	E50	-----	-----	-----											
		E51	Normal	200	12											
		E52	Cuadrante	800	1											
		E53	Cuadrante	800	2											
		E54	Octante	800	1											
	F. Base Radial (Multicuadrática)	E55	Octante	800	2											
		E56	Normal	200	12											
		E57	Cuadrante	800	1											
		E58	Cuadrante	800	2											
		E59	Octante	800	1											
	Inversa a la Distancia (1)	E60	Octante	800	2											
		E61	Normal	200	12											
		E62	Cuadrante	800	1											
		E63	Cuadrante	800	2											
		E64	Octante	800	1											
		E65	Octante	800	2											
		E66	-----	-----	-----											
<b>MUESTREO - C</b>	Inversa a la Distancia (2)	E67	-----	800	-----											
		E68	-----	200	-----											
		E69	-----	-----	-----											
	F. Base Radial (Multicuadrática)	E70	Normal	200	12											
		E71	Cuadrante	800	1											
		E72	Cuadrante	800	2											
		E73	Octante	800	1											
		E74	Octante	800	2											

Tabla 6

TABLA DE FRECUENCIAS

TEST	Error (m)	Frecuencias Absolutas	Frecuencias Relativas (%)	Frec. Abs. Acumuladas	Frec. Rel. Acumuladas (%)
E28 Inv. Dist. 1pto./c	<5	2748	94,40	2748	94,40
	5 a 10	163	5,60	2911	100,00
	10 a 15	0	0,00	2911	100,00
	15 a 20	0	0,00	2911	100,00
	>20	0	0,00	2911	100,00
E46 Triangulación Lineal	<5	2797	96,08	2797	96,08
	5 a 10	114	3,92	2911	100,00
	10 a 15	0	0,00	2911	100,00
	15 a 20	0	0,00	2911	100,00
	>20	0	0,00	2911	100,00
E48 Vecino más Próximo	<5	1732	59,50	1732	59,50
	5 a 10	1008	34,63	2740	94,13
	10 a 15	159	5,46	2899	99,59
	15 a 20	9	0,31	2908	99,90
	>20	3	0,10	2911	100,00
E50 Mínima Curvatura	<5	2618	89,93	2618	89,93
	5 a 10	221	7,59	2839	97,53
	10 a 15	45	1,55	2884	99,07
	15 a 20	15	0,52	2899	99,59
	>20	12	0,41	2911	100,00
E51 F. Base Radial	<5	2899	99,59	2899	99,59
	5 a 10	12	0,41	2911	100,00
	10 a 15	0	0,00	2911	100,00
	15 a 20	0	0,00	2911	100,00
	>20	0	0,00	2911	100,00
E66 Triangulación Lineal	<5	2582	88,70	2582	88,70
	5 a 10	290	9,96	2872	98,66
	10 a 15	24	0,82	2896	99,48
	15 a 20	9	0,31	2905	99,79
	>20	6	0,21	2911	100,00
E70 F. Base Radial	<5	2684	92,20	2684	92,20
	5 a 10	195	6,70	2879	98,90
	10 a 15	19	0,65	2898	99,55
	15 a 20	10	0,34	2908	99,90
	>20	3	0,10	2911	100,00

Tabla 7

**GRILLA DE REFERENCIA  
MUESTREO IRREGULAR - 1314 PUNTOS EN TOTAL  
COMPARACIÓN RESTITUCIÓN - KRIGING**

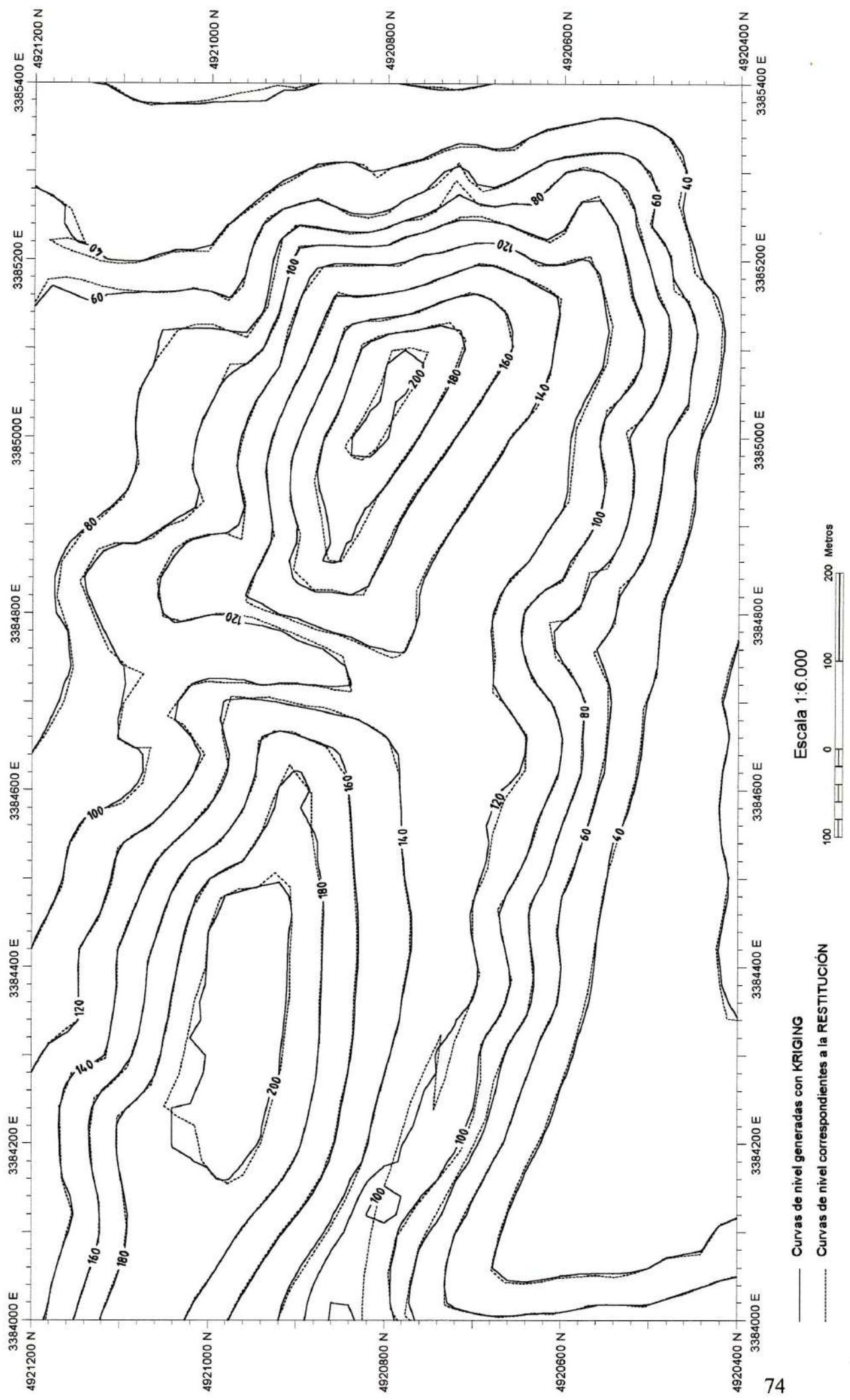


Figura 7

## MUESTREO IRREGULAR (A)

1020 Puntos de referencia

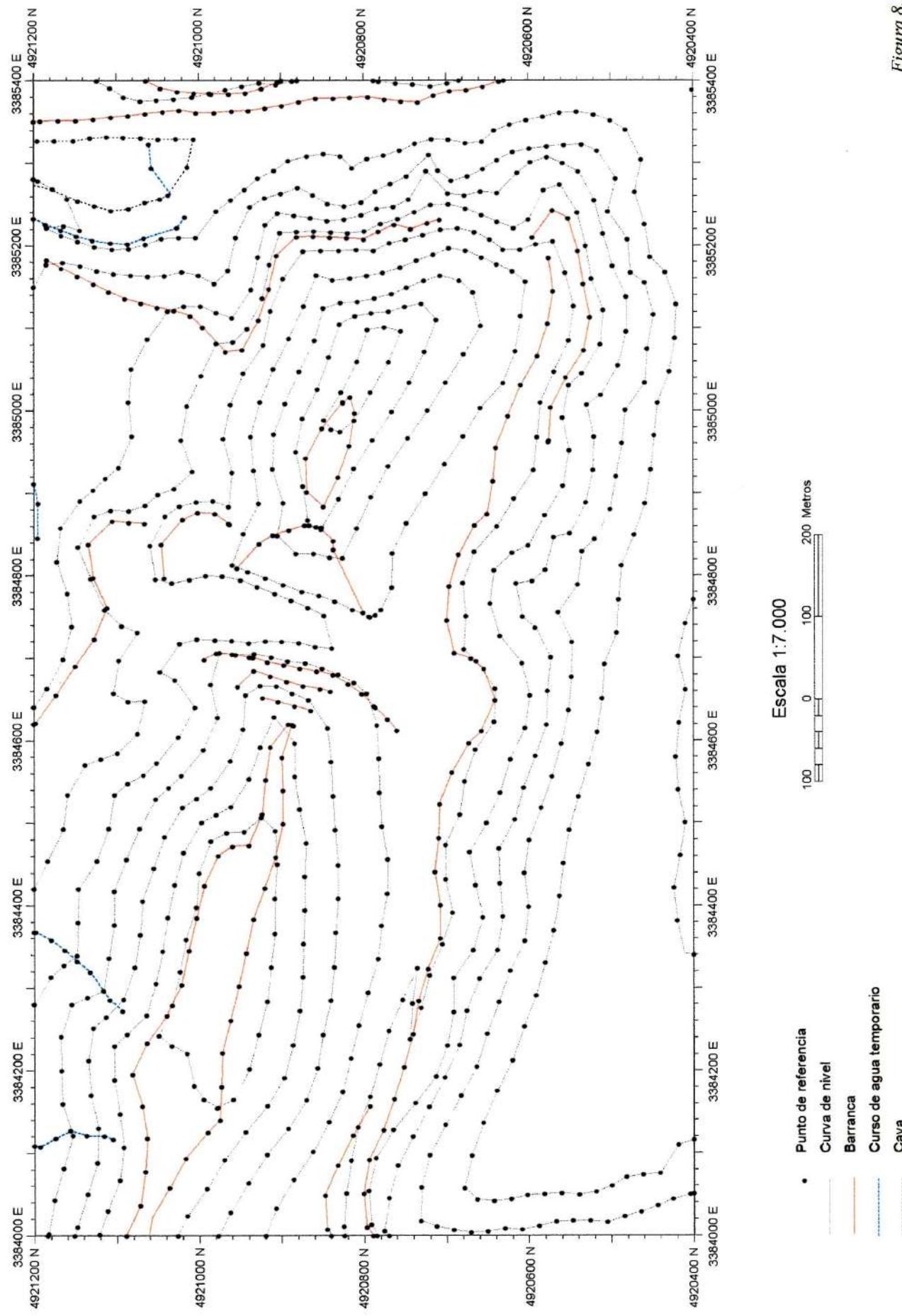
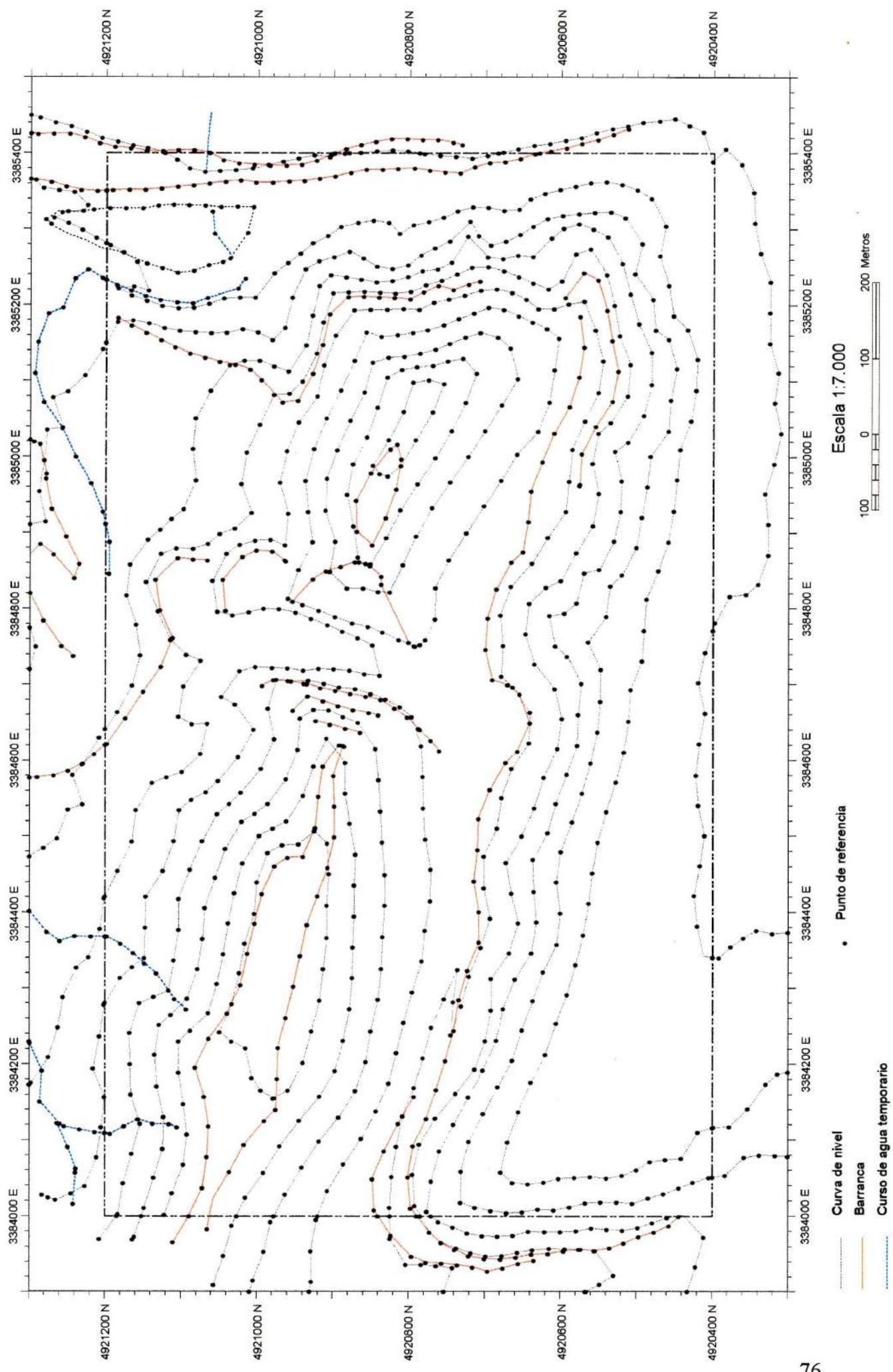


Figura 8.1

## MUESTREO IRREGULAR (B)

1314 Puntos de referencia



## MUESTREO IRREGULAR (C)

380 Puntos de referencia

